THEORIE
DES
ROTIERENDEN FELDES

MIT ANWENDUNG AUF DIE

BESTIMMUNG DES STROMDIAGRAMMES DER ASYNCHRONEN MASCHINEN.

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR

ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI FÜR ELEKTROTECHNIK

AN DER

GROSSHERZOGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE

VORGELEGT

AM 15. JUNI 1901

VON

O. S. BRAGSTAD,
ELEKTRO-INGENIEUR.

MIT 20 TEXTFIGUREN UND 3 GRAPHISCHEN TABELLEN.

STUTTGART.
DRUCK DER UNION DEUTSCHE VERLAGSGESELLSCHAFT.
1902.

Inhalt.

I. Ueber die Form des Feldes in den asynchronen Maschinen.

1. Einleitung.

Bei den meisten Rechnungen über asynchrone Maschinen geht man von der Annahme aus, dass sich die Feldstärke längs dem Ankerumfang in jedem Moment räumlich nach einem Sinusgesetz ändert. Die zeitliche Aenderung des Feldes in irgend einem Punkte des Ankerumfanges wird ebenfalls sinusförmig angenommen, und zwar so, dass für zwei verschiedene Punkte am Umfange die zeitliche Variation mit einer Phasenverschiebung erfolgt, die der räumlichen Entfernung der beiden Punkte entspricht. Man bekommt somit das Feld als eine am Ankerumfang mit gleichmässiger Geschwindigkeit fortschreitende reine Sinuswelle.

Ein derartiges fortschreitendes Sinusfeld, reines Drehfeld, kann man sich entstanden denken aus einer Anzahl p im Raume feststehender, aber zeitlich nach einem Sinusgesetz variierender Sinusfelder, deren räumliche Verschiebung $\frac{1}{p}$ mal der Wellenlänge des Feldes ist, während die Phasenverschiebung ihrer zeitlichen Variation $\frac{2\pi}{p}$ beträgt.

Setzen wir z. B. $p = 3$ und bezeichne T die Schwingungsdauer der zeitlichen Variation und X die Wellenlänge der Felder, so sind in irgend einem Punkte x des Ankerumfanges zu irgend einem Zeitmomente t die drei Feldstärken gegeben durch die drei Gleichungen:

$$y_1 = Y_1 \cos \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_2 = Y_2 \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{1}{3} X\right),$$

$$y_3 = Y_3 \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{2}{3} X\right),$$

wo Y_1, Y_2 und Y_3 die in dem betrachteten Moment vorhandenen Maximalwerte der drei Felder sind. Diese drei Maximalwerte ändern sich nun zeitlich nach dem folgenden Gesetz:

$$Y_1 = Y \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

$$Y_2 = Y \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{3} T\right),$$

$$Y_3 = Y \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2}{3} T\right),$$

wobei Y den für alle Felder gleich grossen, überhaupt vorkommenden Maximalwert (Amplitude) bedeutet. Setzen wir die Werte aus den drei letzten Gleichungen in die drei vorhergehenden ein, so bekommen wir:

$$y_1 = Y \sin \frac{2\pi}{T} t \cos \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_2 = Y \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{3} T\right) \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{1}{3} X\right),$$

$$y_3 = Y \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2}{3} T\right) \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{2}{3} X\right),$$

was in der Form geschrieben werden kann:

$$y_1 = \frac{1}{2} Y \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{X}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right)\right],$$

$$y_2 = \frac{1}{2} Y \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{X} - \frac{2}{3}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right)\right],$$

$$y_3 = \frac{1}{2} Y \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{X} - \frac{4}{3}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right)\right],$$

indem man die Formel benutzt:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)].$$

Die resultierende Feldstärke in einem beliebigen Punkte x am Umfang zur Zeit t ist gleich der Summe der drei Feldstärken y_1, y_2 und y_3, also:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{3}{2} Y \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right) \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

Dies ist die Gleichung des am Eingang besprochenen sinusförmigen Drehfeldes. Man sieht, dass sowohl die zeitliche Variation desselben bei konstantem x wie seine räumliche Variation bei konstantem t von Sinusform ist.

Die in der Praxis verwendeten Drehfelder werden erhalten, indem man ein- oder mehrphasige Wechselströme durch am Ankerumfange angebrachte Spulen leitet, welche räumlich in Bezug auf die Wellenlänge des Drehfeldes dieselbe Verschiebung haben wie die Ströme zeitlich in Bezug auf ihre Periode. Bei dieser Erzeugungsart kann nicht, wie in dem betrachteten idealen Fall, ein Sinusfeld erhalten werden; denn erstens ist die räumliche Variation des Feldes einer Spule keine Sinusfunktion, sondern eine von der Form der Spule abhängige Funktion, und zweitens ist auch nicht die zeitliche Variation des Feldes in jedem Punkt des Umfanges von Sinusform; denn das Feld variiert mit dem Wechselstrom der Spule, und derselbe kann eine beliebige Form haben.

Eine Kurve, welche in jedem Moment die magnetomotorische Kraft einer Spule als Funktion des Ankerumfanges darstellt, soll im folgenden mit dem Namen Polkurve bezeichnet werden. Eine Kurve, welche den Wechselstrom einer Spule als Funktion der Zeit darstellt, nennt man gewöhnlich eine Stromkurve. Die im folgenden zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, den Einfluss der Form der Polkurve und der Stromkurve auf das resultierende Drehfeld zu untersuchen. Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir den magnetischen Widerstand des Eisens der Maschine gleich 0; ferner setzen wir den magnetischen Widerstand im Luftraume in allen Punkten des Umfanges gleich, vernachlässigen also den Einfluss der Oeffnungen der Nuten. Indem wir diese Vereinfachungen machen, die übrigens bei der gewöhnlichen Ausführung der asynchronen Maschinen keinen grossen Fehler ergeben, können wir in jedem Punkt des Ankerumfanges das Feld mit der M.M.K. proportional setzen.

Für die folgende Untersuchung nehmen wir, wie üblich, sogenannte breite oder gekreuzte Spulen an, d. h. Spulen, deren Breite eine halbe Polteilung ist.

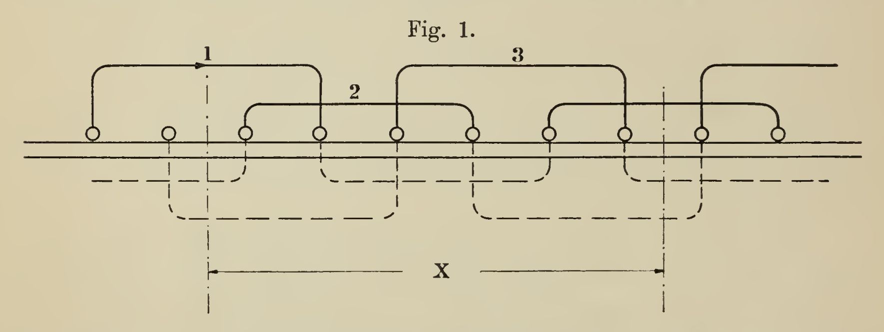
2. Einfluss der Formen der Pol- und Stromkurve auf das erzeugte Drehfeld.

Nach dem Fourierschen Satze kann eine beliebige periodische Polkurve als Funktion von dem Ankerumfange x in der folgenden Reihe entwickelt werden:

$$y_1 = Y_1 \cos \frac{2\pi}{X}(x - \chi_1) + Y_2 \cos 2 \frac{2\pi}{X}(x - \chi_2) + \dots$$
$$+ Y_m \cos m \frac{2\pi}{X} x.$$

Hierbei sind Y_1, Y_2 u. s. w. die für den betrachteten Zeitpunkt geltenden Maximalwerte der einzelnen Harmonischen der Polkurve; χ_1, χ_2 u. s. w. sind die räumlichen Verschiebungen der einzelnen Harmonischen in Bezug auf den gewählten Anfangspunkt $x = 0$. Um

Fig. 1.



die Schreibweise der Gleichungen zu vereinfachen, wählen wir diesen Anfangspunkt so, dass $\chi_m = 0$ wird. Ist die Zahl der Phasen gleich p, so haben wir für je eine Wellenlänge X auf dem Ankerumfange p solcher Polkurven, die um die Strecke $\frac{X}{p}$ gegeneinander verschoben sind, und für jede Polkurve eine Spule, wie Fig. 1 für ein Dreiphasensystem zeigt.

Die Gleichungen der p Polkurven eines p-Phasensystems lauten nun:

$$y_1 = \Sigma Y_{m_1} \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_2 = \Sigma Y_{m_2} \cos m \frac{2\pi}{X}\left(x - \frac{1}{p} X\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_p = \Sigma Y_{m_p} \cos m \frac{2\pi}{X}\left(x - \frac{p-1}{p} X\right).$$

Hierbei ist die Summation auszuführen über m von 1 bis ∞. Y_{m_1}, Y_{m_2} u. s. w. sind die in dem betrachteten Momente vorhandenen Maximalwerte der m^{ten} Harmonischen der p Polkurven. Weil die p Polkurven von p Wechselströmen, die um $\frac{2\pi}{p}$ verschoben sind, erzeugt werden, so können wir die Maximalwerte schreiben, indem wir die Gleichungen der p Wechselströme in Fouriersche Reihen auflösen:

$$Y_{m_1} = C_m i_1 = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t,$$

$$Y_{m_2} = C_m i_2 = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{p} T\right),$$

. . . .

$$Y_{m_p} = C_m i_p = \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p-1}{p} T\right).$$

Hierin bedeutet Y_{nm} die überhaupt vorkommende Amplitude derjenigen Welle des Feldes, welche durch Zusammenwirken der m^{ten} Harmonischen der Polkurve mit der n^{ten} Harmonischen der Stromkurve entsteht. Der Anfangspunkt der Zeit t ist so gewählt, dass die n^{te} Stromharmonische der Phase 1 zur Zeit Null durch Null geht. Führen wir die Werte von Y_{m_1}, Y_{m_2} u. s. w. aus den letzten Gleichungen in die vorletzten ein, so bekommen wir die Ordinaten der p Polkurven als Funktion des Umfanges x und der Zeit t durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$y_1 = \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_2 = \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{p} T\right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{1}{p} X\right),$$

. . . .

$$y_p = \Sigma \Sigma Y_{nm} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p-1}{p} T\right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{p-1}{p} X\right).$$

Die für jede Polkurve auftretende Doppelsumme ist zu bilden einmal nach den Harmonischen der Stromkurve (n) und das andere Mal nach den Harmonischen der Polkurve (m). Wir betrachten nun diejenigen höheren Wellen der Polkurven, welche durch das Zusammenwirken der n^{ten} Harmonischen der Stromkurven mit den m^{ten} Harmonischen der Polkurven entstehen. Diese sind:

$$y_{n m_1} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_{n m_2} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{p} T\right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{1}{p} X\right),$$

. . . .

$$y_{n m_p} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{p-1}{p} T\right) \cos m \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{p-1}{p} X\right).$$

Unter Benutzung der früher angegebenen Umformung:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + \beta)]$$

können wir diese Gleichungen schreiben:

$$y_{n m_1} = \frac{1}{2} Y_{n m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X}\right)\right],$$

$$y_{n m_2} = \frac{1}{2} Y_{n m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X} - \frac{1}{p}(n + m)\right) + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X} - \frac{1}{p}(n - m)\right)\right],$$

. . . .

$$y_{n m_p} = \frac{1}{2} Y_{n m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X} - \frac{p-1}{p}(n + m)\right) + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X} - \frac{p-1}{p}(n - m)\right)\right].$$

Um die entsprechende Harmonische der resultierenden Feldkurven zu erhalten, haben wir in jedem Punkt des Ankerumfanges diese p $n m^{ten}$ Harmonischen der p Polkurven zu addieren. Bezeichnen wir also die Ordinaten dieser $n m^{ten}$ Harmonischen der resultierenden Feldkurve mit $y_{n m}$, so ist:

$$y_{n m} = y_{n m_1} + y_{n m_2} + \ldots + y_{n m_p}.$$

Bei dieser Summation treten die folgenden Spezialfälle auf:

Fall 1. $n + m$ und $n - m$ seien beide nicht durch p teilbar; die Division ergebe in beiden Fällen eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 plus einen positiven oder negativen Rest. Der Rest sei bezw. durch r_1 und r_2 bezeichnet. Bilden wir nun in dem Gleichungssystem für $y_{n m_1}$, $y_{n m_2}$ u. s. w. die Summe der in der ersten Reihe stehenden Sinus, so bekommen wir:

$$\sin 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}\right)+\sin 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}-\frac{r_1}{p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\sin 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}-(p-1)\,\frac{r_1}{p}\right).$$

Wir multiplizieren diese Summe mit

$$\sin 2\pi\,\frac{r_1}{2\,p}$$

und schreiben sie:

$$\frac{1}{2}\left[-\cos 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}+\frac{r_1}{2\,p}\right)+\cos 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}-\frac{r_1}{2\,p}\right)\right.$$
$$\left.-\cos 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}-\frac{r_1}{2\,p}\right)\pm\ldots+\cos 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}+\frac{m\,x}{X}-r_1+\frac{r_1}{2\,p}\right)\right].$$

Diese Summe ist 0. Ebenso beweist man, dass die Summe der in der zweiten Reihe desselben Gleichungssystems stehenden Sinus gleich 0 wird. Wir bekommen hieraus den folgenden Satz:

In einem p-Phasensystem erzeugt die n^{te} Harmonische des Stromes mit der m^{ten} Harmonischen der Polkurve keine $n\,m^{te}$ Harmonische in der resultierenden Feldkurve, wenn $n+m$ und $n-m$ beide nicht durch p teilbar sind.

Fall 2. $n-m$ sei durch p teilbar, aber nicht $n+m$. Wie im Fall 1 ist dann die Summe der in der ersten Reihe stehenden Sinus gleich 0. Die Summe der Sinus in der zweiten Reihe ist aber:

$$p\,\sin 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}-\frac{m\,x}{X}\right).$$

Für diesen Fall ist also:

$$y_{n\,m}=\frac{p}{2}\,Y_{n\,m}\,\sin 2\pi\left(\frac{n\,t}{T}-\frac{m\,x}{X}\right).$$

Durch Vergleich mit der in der Einleitung gegebenen Gleichung sehen wir, dass dies ein reines Drehfeld darstellt von der Amplitude $\frac{p}{2}\,Y_{n\,m}$, der Periode $\frac{T}{n}$ und von der Wellenlänge $\frac{X}{m}$.

Mit Ausnahme des Ein- und Zweiphasensystems ($p=1$ und $p=2$) kommt immer die erste Harmonische des resultierenden Drehfeldes unter diesen Fall; denn diese Harmonische wird gebildet durch das Zusammenwirken der ersten Harmonischen der Stromkurve mit der ersten Harmonischen der Polkurve, sie wird also erhalten, wenn man $n=m=1$ setzt, so dass $\frac{n-m}{p}=0$ wird, was der obigen Bedingung

entspricht. Die Gleichung für diese Grundwelle des rotierenden Feldes ist somit:

$$y_{11} = \frac{p}{2} Y_{11} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right).$$

Hieraus finden wir den folgenden Satz:

In einem p-Phasensystem erzeugt die n^{te} Harmonische des Stromes mit der m^{ten} Harmonischen der Polkurve eine $n m^{te}$ Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald $n - m$ durch p teilbar und $n + m$ nicht durch p teilbar ist. Die Rotationsrichtung dieser Harmonischen ist dieselbe wie die des Grundfeldes; aber ihre Periodenzahl ist das n-fache und ihre Polzahl das m-fache von demjenigen des Grundfeldes.

Fall 3. $n - m$ sei nicht durch p teilbar, sondern $n + m$. Wie im Fall 1 ist die Summe der in der zweiten Reihe der Gleichungen für $y_{n m_1}$, $y_{n m_2}$ u. s. w. stehenden Sinus gleich 0. Die Summe der Sinus in der ersten Reihe ist:

$$p \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X}\right)$$

und

$$y_{nm} = \frac{p}{2} Y_{nm} \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X}\right).$$

Hieraus sieht man, dass diese Harmonischen der resultierenden Feldkurve die umgekehrte Drehrichtung der im zweiten Falle behandelten Harmonischen haben. Diese Wellen bewegen sich also auch in der entgegengesetzten Richtung zu der Grundwelle des Feldes.

In einem p-Phasensystem erzeugt die n^{te} Harmonische des Stromes mit der m^{ten} Harmonischen der Polkurve eine $n m^{te}$ Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald $n + m$ durch p teilbar und $n - m$ nicht durch p teilbar ist. Die Rotationsrichtung dieser Harmonischen ist derjenigen des Grundfeldes entgegengesetzt; ihre Periodenzahl ist das n-fache und ihre Polzahl das m-fache von demjenigen des Grundfeldes.

Fall 4. $n - m$ und $n + m$ seien beide durch p teilbar. Damit dies der Fall sein soll, müssen bei ungerader Phasenzahl p n und m für sich durch p teilbar sein. Für diesen Fall ist

$$y_{nm} = \frac{p}{2} Y_{nm} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X}\right)\right].$$

Dies sind zwei harmonische Drehfelder von gleicher Amplitude, Periode und Wellenlänge, die in entgegengesetzter Richtung rotieren. Aus denselben resultiert ein stehendes oder pulsierendes Feld.

In einem p-Phasensystem erzeugt die n^{te} Harmonische des Stromes mit der m^{ten} Harmonischen der Polkurve zwei gleiche, aber entgegengesetzt rotierende Harmonische in der resultierenden Feldkurve, sobald $n - m$ und $n + m$ beide durch p teilbar sind. Diese beiden Felder sind in der Wirkung gleichwertig mit einem stehenden oder pulsierenden Feld von der doppelten Amplitude.

Beim Ein- und Zweiphasensystem ($p = 1$ und $p = 2$) ist diese Bedingung für die Grundschwingung des Stromes und der Polkurve erfüllt ($n = 1$ und $m = 1$). Bei diesen Systemen ist deshalb das Grundfeld ein pulsierendes Feld.

Hier sei noch an die folgende Regel erinnert:

In einem symmetrischen p-Phasensystem ohne neutralen Leiter können n^{te} Harmonische, für welche n durch p teilbar ist, in der Stromkurve nicht auftreten.

Für gewöhnlich können ferner aus Symmetriegründen weder in den Strom- noch in den Polkurven Harmonische n und m auftreten, für welche n resp. m durch 2 teilbar ist.

Wir können die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen, indem wir die erste Harmonische der resultierenden Feldkurve als rechtsrotierend annehmen:

In einem p-Phasensystem entsteht

kein Feld,	wenn	$\frac{n+m}{p}$	und	$\frac{n-m}{p}$	unteilbar,
rechtsrotierendes Feld,	„			$\frac{n-m}{p}$	teilbar,
linksrotierendes Feld,	„	$\frac{n+m}{p}$			teilbar,
pulsierendes Feld,	„	$\frac{n+m}{p}$	und	$\frac{n-m}{p}$	teilbar.

Hierin sind die vier möglichen Fälle enthalten.

Wir erkennen nun, dass ein Drehfeld, wie es in der Praxis vorkommt, aus einem sinusartigen Grundfeld mit einer unendlichen Anzahl von harmonischen Sinusfeldern höherer Ordnung besteht. Die Polzahlen dieser Felder sind 1-, 3-, 5- . . . m-mal der Polzahl des Grundfeldes, und die Periodenzahlen derselben sind 1-, 3-, 5- . . . n-mal

der Periodenzahl des Grundfeldes. Die hieraus sich ergebenden verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten der einzelnen Harmonischen können positiv, negativ oder Null sein; im letzteren Falle hat man stehende oder pulsierende höhere Harmonische.

Diese Vorstellung, die auf den ersten Blick als eine Komplikation erscheint, wird uns, wie später gezeigt werden soll, zu einem besseren Verständnis der Vorgänge in den asynchronen Maschinen verhelfen.

Betrachten wir nun von diesem Gesichtspunkte aus die gewöhnlichsten Mehrphasensysteme, indem wir mit dem Einphasensystem anfangen.

Einphasensystem, $p = 1$.

Bei diesem System sind immer $n + m$ und $n - m$ durch p teilbar. In demselben können demnach alle höheren Harmonischen in der resultierenden Feldkurve auftreten, und zwar geben dieselben alle stehende und pulsierende Felder. Die Regel, dass durch p teilbare höhere Harmonische der Stromkurve nicht ohne Neutralleitung auftreten können, ergiebt, dass in einem Einphasensystem ohne Neutralleitung keine Harmonische, also überhaupt kein Strom, auftreten kann. Ein solches System wäre deshalb undenkbar. Bei dem gewöhnlichen Einphasensystem muss man sich deswegen den einen Aussenleiter von dem einen Endpunkte der Phase als die „neutrale“ Leitung vorstellen. In einem solchen System können auch gerade Harmonische in der Stromkurve auftreten und ebenfalls pulsierende Felder erzeugen.

Zweiphasensystem, $p = 2$.

$n + m$ und $n - m$ (m ungerade) sind entweder beide durch 2 teilbar oder beide durch 2 unteilbar. Die Harmonischen der Stromkurve erzeugen also entweder pulsierende oder gar keine Harmonischen im resultierenden Feld; die pulsierenden Feldharmonischen werden von den ungeraden Stromharmonischen erzeugt, während die geraden Stromharmonischen kein Feld hervorbringen. Die letzteren Stromharmonischen können nur bei Vorhandensein eines neutralen Leiters auftreten.

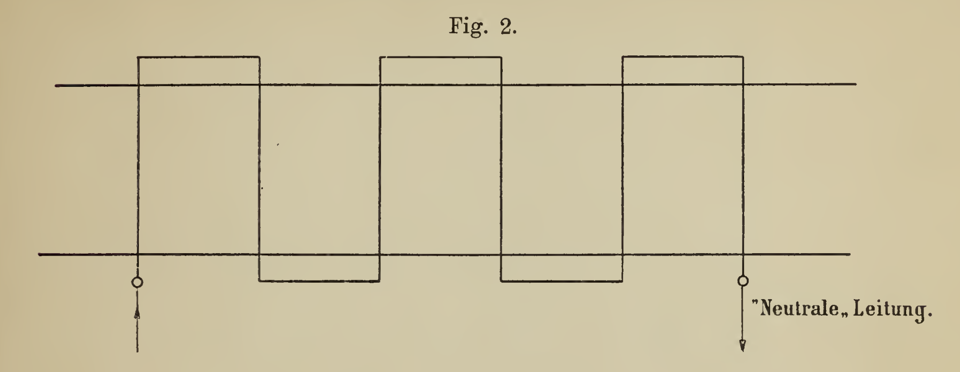
Der Unterschied zwischen einer einphasigen und einer zweiphasigen Wickelung geht deutlich aus den Fig. 2 und 3 hervor. In Fig. 3 ist Phase 1 voll und Phase 2 punktiert gezeichnet.

Dreiphasensystem, $p = 3$.

Die Verhältnisse bei diesem System sind in der nachstehenden Tabelle schematisch dargestellt. In der Horizontalreihe stehen die

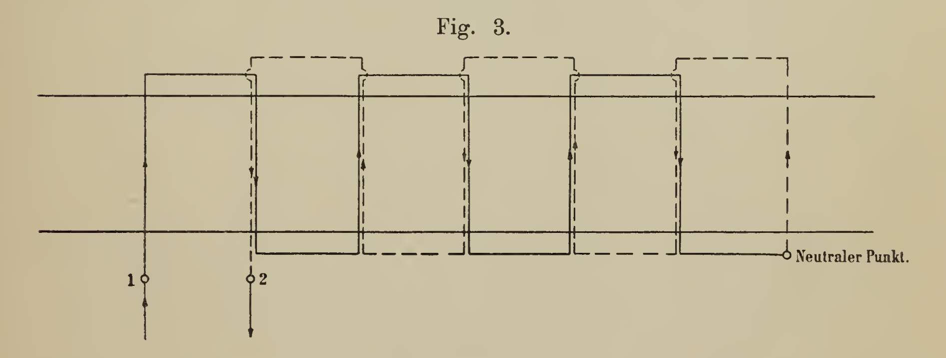
Perioden- und Schwingungszahlen der einzelnen Stromharmonischen und in der Vertikalreihe die Wellenlängen und die Polzahlen der Harmonischen der Polkurven. Die entstehenden Harmonischen des resultierenden Feldes sind durch Kreise und ihre Rotationsrichtung durch Pfeile angedeutet. Doppelfelder oder pulsierende Felder werden

Fig. 2.



nur von den durch 3 teilbaren höheren Harmonischen des Stromes und der Polkurve erzeugt. Ohne Neutralleitung können diese Felder deswegen im Dreiphasensystem nicht vorkommen. Schliesst man noch die geraden Harmonischen aus, so treten nur Drehfelder von 1-, 5-, 7-, 11-, 13-, 17- u. s. w. -facher Periodenzahl und 1-, 5-, 7-, 11-, 13-,

Fig. 3.



17- u. s. w. -facher Polzahl auf. Die Drehrichtung dieser Felder ist abwechselnd nach rechts und nach links. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines $n\,m^{ten}$ Feldes im Verhältnis zum Hauptfelde ist $\frac{n}{m}$; sie ist also gleich derjenigen des Hauptfeldes für $n = m$, und grösser oder kleiner als diejenige des Hauptfeldes, je nachdem n grösser oder kleiner als m ist.

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines Dreiphasensystems.

Periode.		T	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{3}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{5}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{7}$	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{9}$	$\frac{T}{10}$	$\frac{T}{11}$	$\frac{T}{12}$	$\frac{T}{13}$
Wellen-länge.	n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X	m 1	↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻
$\frac{X}{3}$	3			↺↻			↺↻			↺↻			↺↻	
$\frac{X}{5}$	5	↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺
$\frac{X}{7}$	7	↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻
$\frac{X}{9}$	9			↺↻			↺↻			↺↻			↺↻	
$\frac{X}{11}$	11	↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺
$\frac{X}{13}$	13	↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻
$\frac{X}{15}$	15			↺↻			↺↻			↺↻			↺↻	
$\frac{X}{17}$	17	↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺
$\frac{X}{19}$	19	↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻	↺		↻
$\frac{X}{21}$	21			↺↻			↺↻			↺↻			↺↻	
$\frac{X}{23}$	23	↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺	↻		↺

Bei dem Dreiphasensystem fallen verhältnismässig viele von den höheren Harmonischen der resultierenden Feldkurve weg, nämlich zunächst die geraden und dann die durch 3 teilbaren. Diese Eigenschaft, welche dem Dreiphasensystem zukommt, weil es unter den Mehrphasensystemen die niedrigste ungerade Phasenzahl hat, macht dies System für viele Zwecke besonders geeignet, wie später genauer gezeigt werden soll.

Vierphasensystem, $p = 4$.

Sind sowohl n wie m ungerade, so ist von den Zahlen $n + m$ und $n - m$ die eine immer durch 4 teilbar und die andere unteilbar. Es kommen deshalb in dem Drehfeld des Vierphasensystems alle ungeraden Harmonischen vor, und zwar sind dieselben alle Drehfelder mit Drehungssinn abwechselnd positiv und negativ. Gerade Harmonische der Stromkurve mit ungeraden Harmonischen der Polkurve erzeugen keine Harmonische in der resultierenden Feldkurve.

Für die Ableitung der Bedingungsgleichung am Anfang dieses Abschnittes haben wir festgesetzt, dass die räumliche Verschiebung der Spulen in einem p-Phasensystem gleich $\frac{2\pi}{p}$ sein soll. In einem Vierphasensystem muss dieselbe also 90^0 betragen. Bezeichnen wir

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines symmetrischen Vierphasensystems.

Periode.		T	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{3}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{5}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{7}$	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{9}$	$\frac{T}{10}$	$\frac{T}{11}$	$\frac{T}{12}$	$\frac{T}{13}$
Wellen-länge	n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X	m 1	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{3}$	3	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{5}$	5	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{7}$	7	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{9}$	9	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{11}$	11	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{13}$	13	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{15}$	15	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{17}$	17	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{19}$	19	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{21}$	21	○		○		○		○		○		○		○
$\frac{X}{23}$	23	○		○		○		○		○		○		○

die vier Phasen der Reihe nach mit 1, 2, 3 und 4, so ist die Verschiebung zwischen 1 und 3 180°, ebenso diejenige zwischen 2 und 4.

Fig. 4.

1 2 3 4

Neutraler Punkt. Neutraler Punkt.

Wir bekommen somit das in Fig. 4 dargestellte abgewickelte Wickelungsschema. Dasselbe ist für eine vierpolige Anordnung gezeichnet.

Bei den Mehrphasensystemen mit einer geraden Anzahl von Phasen p kann oft eine Modifikation eintreten, welche darin besteht, dass die Phasenzahl von p zu $\frac{p}{2}$ reduziert wird, während die räumliche Anordnung der Spulen der verbleibenden $\frac{p}{2}$ Phasen bestehen bleibt, so dass die Verschiebung derselben nach wie vor $\frac{2\pi}{p}$ beträgt.

Ein derartiges System tritt z. B. auf, wenn man in einem Vierphasensystem, wie es in Fig. 4 dargestellt ist, die zu Phase 1 und 2 jeweils um 180° verschobenen Phasen 3 und 4 wegnimmt, während die in Fig. 4 markierten Neutralpunkte verbunden oder getrennt bleiben. Im ersteren Falle bekommt man das in der Praxis gebräuchliche sogenannte „verkettete Zweiphasensystem", im letzteren Falle dagegen das „unverkettete Zweiphasensystem".

Bei einem solchen System bekommen wir die n m^ten Harmonischen der $\frac{p}{2}$, um $\frac{2\pi}{p}$ verschobenen Polkurven als Funktion von Zeit und Raum ähnlich, wie früher, durch die folgenden $\frac{p}{2}$ Gleichungen ausgedrückt.

$$y_{n m_1} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} t \cos m \frac{2\pi}{X} x,$$

$$y_{n m_2} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{1}{p} T\right) \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{1}{p} X\right),$$

. . . .

$$y_{n m \frac{p}{2}} = Y_{n m} \sin n \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\frac{1}{2} p - 1}{p} T\right) \cos \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{\frac{1}{2} p - 1}{p} X\right).$$

Nach entsprechender Umformung hat man wie früher

$$y_{n m_1} = \frac{1}{2} Y_{n m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X}\right)\right],$$

$$y_{n m_2} = \frac{1}{2} Y_{n m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} + \frac{m x}{X} - \frac{1}{p} (n + m)\right)\right.$$

$$\left. + \sin 2\pi \left(\frac{n t}{T} - \frac{m x}{X} - \frac{1}{p} (n - m)\right)\right],$$

$$y_{n\,m\,\frac{p}{2}} = \frac{1}{2} Y_{n\,m} \left[\sin 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} + \frac{m\,x}{X} - \frac{\frac{1}{2}\,p - 1}{p}\,(n+m) \right) \right.$$

$$\left. + \sin 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} - \frac{m\,x}{X} - \frac{\frac{1}{2}\,p - 1}{p}\,(n-m) \right) \right].$$

Die Ordinate der entsprechenden Harmonischen in der resultierenden Feldkurve ist:

$$y_{n\,m} = y_{n\,m_1} + y_{n\,m_2} + \ldots + y_{n\,m\,\frac{p}{2}}.$$

Fall 1. $n + m$ und $n - m$ seien beide durch p nicht teilbar. Der Rest sei bezw. r_1 und r_2. Die Summe ist dann:

$$y_{n\,m} = \frac{1}{2} Y_{n\,m} \left\{ \frac{1}{2 \sin 2\pi \frac{r_1}{2\,p}} \left[- \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} + \frac{m\,x}{X} + \frac{r_1}{2\,p} \right) \right. \right.$$

$$+ \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} + \frac{m\,x}{X} - \frac{r_1}{2\,p} \right) - \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} + \frac{m\,x}{X} - \frac{r_1}{2\,p} \right)$$

$$\left. + \ldots + \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} + \frac{m\,x}{X} - \frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2\,p} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2 \sin 2\pi \frac{r_1}{2\,p}} \left[- \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} - \frac{m\,x}{X} + \frac{r_2}{2\,p} \right) \right.$$

$$+ \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} - \frac{m\,x}{X} - \frac{r_2}{2\,p} \right)$$

$$- \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} - \frac{m\,x}{X} - \frac{r_2}{2\,p} \right) + \ldots$$

$$\left. \left. + \cos 2\pi \left(\frac{n\,t}{T} - \frac{m\,x}{X} - \frac{r_2}{2} + \frac{r_2}{2\,p} \right) \right] \right\}.$$

Hier treten die folgenden Unterfälle auf:

Fall 1a. Die Reste r_1 und r_2 seien beide durch 2 teilbar. Die ganze Summe ist Null.

Fall 1b. r_1 teilbar durch 2, r_2 unteilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}} \cos 2\pi \left(\frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} + \frac{r_2}{2p}\right).$$

Also ein Drehfeld in der Richtung des Hauptfeldes.

Fall 1c. r_1 unteilbar durch 2, r_2 teilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \cos 2\pi \left(\frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p}\right).$$

Das bedeutet ein Drehfeld in entgegengesetzter Richtung des Hauptfeldes.

Fall 1d. r_1 und r_2 unteilbar durch 2.

$$y_{nm} = -\frac{1}{2} Y_{nm} \left[\frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} \cos 2\pi \left(\frac{nt}{T} + \frac{mx}{X} + \frac{r_1}{2p}\right) + \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}} \cos 2\pi \left(\frac{nt}{T} - \frac{mx}{X} + \frac{r_2}{2p}\right)\right].$$

Das bedeutet nach dem Vorherigen zwei in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit rotierende Felder. Sie können zu einem pulsierenden Feld von einer Amplitude gleich der Summe der Amplituden der beiden Drehfelder zusammengefasst werden. Also von der Amplitude

$$-\frac{1}{2} Y_{nm} \left[\frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_1}{2p}} + \frac{1}{\sin 2\pi \frac{r_2}{2p}}\right].$$

Fall 2. $n - m$ sei durch p teilbar, aber nicht $n + m$. Wir haben dann wie unter Fall 2 in dem vorhergehenden Abschnitt unter Berücksichtigung, dass nur $\frac{p}{2}$ Phasen vorhanden sind,

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_{nm} \sin 2\pi \left(\frac{nt}{T} - \frac{mx}{X}\right).$$

Die zweite Summe verschwindet aber hier nicht immer; sondern sie ist nach einem der Unterfälle im Hauptfalle 1 zu behandeln.

Fall 3. $n + m$ sei durch p teilbar, aber nicht $n - m$.

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_m \sin 2\pi \left(\frac{nt}{T} + \frac{mx}{X}\right).$$

Die zweite Summe wird erhalten je nach der Grösse des Restes r_2 nach einem der unter Fall 1 behandelten Unterfälle.

Fall 4. $n + m$ und $n - m$ seien beide durch p teilbar; man bekommt das Doppelfeld:

$$y_{nm} = \frac{p}{4} Y_{nm} \left[\sin 2\pi \left(\frac{nt}{T} + \frac{mx}{X}\right) + \sin 2\pi \left(\frac{nt}{T} - \frac{mx}{X}\right)\right].$$

Beispielsweise ist in dem beistehenden Schema eine Zusammenstellung der möglichen Harmonischen in dem Drehfelde eines unsymmetrischen, halbierten Vierphasensystems, also für $p = 4$, gegeben.

Uebersicht über die Harmonischen in dem Drehfelde eines unsymmetrischen, halbierten Vierphasensystems (Zweiphasensystem).

Periode.		T	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{3}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{5}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{7}$	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{9}$	$\frac{T}{10}$	$\frac{T}{11}$	$\frac{T}{12}$	$\frac{T}{13}$
Wellenlänge.	n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X	m 1	↻	↺↻	↺	↺↻	↻	↺↻	↺	↺↻	↻	↺↻	↺	↺↻	↻
$\frac{X}{3}$	3	↺	↺↻	↻	↺↻	↺	↺↻	↻						
$\frac{X}{5}$	5	↻	↺↻	↺	↺↻	↻	↺↻	↺						
$\frac{X}{7}$	7	↺	↺↻	↻	↺↻	↺	↺↻	↻						
$\frac{X}{9}$	9	↻	↺↻	↺	↺↻	↻	↺↻	↺						
$\frac{X}{11}$	11	↺	↺↻	↻	↺↻									
$\frac{X}{13}$	13	↻												
$\frac{X}{15}$	15	↺												
$\frac{X}{17}$	17	↻												
$\frac{X}{19}$	19	↺												
$\frac{X}{21}$	21	↻												
$\frac{X}{23}$	23	↺												

Nehmen wir z. B. die Grundschwingung von Feld und Strom, so ist $n = m = 1$ zu setzen. $n - m = 0$, also durch 4 teilbar, ergibt ein rechtsdrehendes Feld nach Fall 2:

$$y_{11} = Y_{11} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}\right).$$

Die Amplitude der Grundharmonischen des resultierenden Drehfeldes ist somit gleich der Amplitude der betreffenden Harmonischen

in der Polkurve. $n + m$ ist hier durch 2 teilbar, wodurch dies Glied verschwindet nach Fall 1 b.

Man findet für dies System immer, wenn n und m ungerade sind, dass von den Zahlen $n + m$ und $n - m$ die eine durch 4 teilbar ist, und dass die andere bei der Division einen Rest gibt, der durch 2 teilbar ist. Somit erhalten wir immer ein rotierendes Feld, während das zweite Glied nach Fall 1 b oder 1 c verschwindet. Hieraus ergeben sich die abwechselnd nach rechts und links rotierenden Felder in der schematischen Zusammenstellung.

Für alle diese Felder gilt, dass die Amplitude einer Harmonischen in der resultierenden Feldkurve gleich der Amplitude der entsprechenden Harmonischen in der Polkurve ist.

Betrachten wir zweitens die geraden Stromharmonischen, z. B. $n = 2$ und $m = 1$. $n + m$ und $n - m$ geben bei der Division die Reste $r_1 = 3$ und $r_2 = 1$, welche beide nicht durch 2 teilbar sind. Wir haben also den Fall 1 d.

$$\sin 2\pi \frac{r_1}{2p} = \sin 2\pi \frac{3}{8} = + \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin 2\pi \frac{r_2}{2p} = \sin 2\pi \frac{1}{8} = + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden gegeneinander rotierenden Felder

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, Y_{nm} \cos 2\pi \left(\frac{2t}{T} + \frac{x}{X} + \frac{3}{8}\right)$$

und

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, Y_{nm} \cos 2\pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{x}{X} + \frac{1}{8}\right),$$

welche ersetzt werden können durch ein pulsierendes Feld mit der Amplitude

$$\sqrt{2}\, Y_{nm}.$$

Dies Feld kann man sich wieder ersetzt denken durch zwei räumlich um 90^0 verschobene pulsierende Felder, welche zeitlich in Phase sind. Die Amplitude dieser pulsierenden Felder ist Y_m. Das ist also die entsprechende Harmonische der Polkurven.

Für die höheren geraden Harmonischen bekommt man analog dem Falle $n = 2$ pulsierende Felder, deren Amplituden im Verhältnis zu denjenigen der entsprechenden Harmonischen der Polkurve dieselben bleiben wie in dem eben betrachteten Falle $n = 2$.

Wir können uns nun den Vorgang im Drehfelde eines unsymmetrischen halbierten Vierphasensystems wie folgt klar machen: Jede Polkurve enthält eine unendliche Reihe von ungeraden Harmonischen m, deren Grössen im wesentlichen durch die Art der Wickelung bestimmt sind, und welche jeweils mit den entsprechenden Harmonischen der benachbarten Polkurve räumlich um 90^0 verschoben sind. Werden die Pole mittelst eines Zweiphasenstromes erregt, so bringen die ungeraden Harmonischen desselben, welche zeitlich um 90^0 verschoben sind, die einzelnen Harmonischen der Polkurven zur Rotation, dabei ändern sich ihre Amplituden nicht; die Drehrichtungen und Drehgeschwindigkeiten sind für die verschiedenen Harmonischen verschieden. für die n m^{te} Harmonische ist die Drehgeschwindigkeit $\frac{n}{m}$ mal derjenigen des Grundfeldes. Die geraden Stromharmonischen sind gleichphasig und wirken daher gleichzeitig auf die Harmonischen aller Polkurven. Hieraus ergeben sich die pulsierenden um 90^0 verschobenen Felder, wie erläutert.

Ein Unterschied dieses Systems gegenüber dem früher behandelten symmetrischen Vierphasensystem in Bezug auf die Beschaffenheit des Feldes besteht nur darin, dass hier die geraden Stromharmonischen zur Wirkung kommen können. Eine Zwangläufigkeit zwischen den ungeraden Harmonischen wie beim Dreiphasensystem, welche dort bewirkt, dass dreifache Harmonische nicht auftreten können, besteht bei diesen Systemen nicht.

II. Einfluss der Formen des Drehfeldes auf den Gang der asynchronen Maschinen.

1. Wickelungsfaktoren von Phasenankern.

Durch die im vorhergehenden eingeführte Betrachtungsweise haben wir einen Ausgangspunkt erhalten, von dem aus wir die Vorgänge in einem noch so komplizierten Drehfelde eines beliebigen Mehrphasensystems einheitlich betrachten und rechnerisch verfolgen können; wir haben nämlich im wesentlichen nur die Rechnungen für ein Sinusfeld durchzuführen, und diese lassen sich dann mit den Modifikationen, die durch die verschiedenen Pol- und Periodenzahlen entstehen, auch auf sämtliche höhere Harmonische des Feldes anwenden.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass die sekundäre Wickelung der Maschine offen ist. Die Polkurve kann eine beliebige Zahl

von ungeraden höheren Harmonischen enthalten. Diese Harmonischen der einzelnen Polkurven bilden jeweils miteinander die Harmonischen des resultierenden Feldes, die entweder rotierend oder pulsierend sein können, wie erläutert. Das Feld sei von einem sinusförmigen Mehrphasenstrom von p Phasen erzeugt; die Periodenzahl desselben sei $c = \frac{1}{T}$. Die Windungszahl pro Phase des primären Stromkreises sei w_1. Wir betrachten zuerst die erste Harmonische des resultierenden Feldes und bezeichnen die gesamte Kraftlinienzahl dieser Harmonischen mit Φ_1. Würde diese magnetische Strömung Φ_1 gleichzeitig durch alle w_1 Windungen einer Phase hindurchtreten, so würde in derselben eine E.M.K.

$$e = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

induziert werden, so dass

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} = \mathrm{E}_0 = 4{,}44\ c\ \Phi_1\ w_1\ 10^{-8}\ \text{Volt}.$$

Hier bezeichne E_0 die Amplitude und E_0 den effektiven Wert der E.M.K.

Liegen dagegen die w_1 Windungen auf dem Ankerumfange verteilt und zwar so, dass pro Phase und Pol s Nuten vorhanden sind, so ist die räumliche Verschiebung zweier benachbarter Nuten oder Spulen

$$\frac{X}{2ps},$$

wo X wie früher die Wellenlänge des Feldes oder den Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier gleichnamiger Pole (am Ankerumfang gemessen) bedeutet. Die zeitliche Verschiebung der vom Sinusfelde in zwei benachbarten Spulen induzierten E.M.Ke. ist folglich:

$$\frac{T}{2ps}.$$

Die in den Spulen 1, 2, 3 . . . s induzierten E.M.Ke. sind nun der Reihe nach:

$$\frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2ps}\right),$$

$$\ldots \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - (s-1)\frac{T}{2ps}\right).$$

Die gesamte E.M.K. pro Phase ist also in einem Moment t

$$e_{01} = \sum_{0}^{s-1} \sigma \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \sigma \frac{T}{2ps}\right).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung rechts und links mit

$$\sin \frac{2\pi}{4ps},$$

wobei wir erhalten:

$$e_{01} \sin \frac{2\pi}{4ps} = \frac{E_0}{s}\left[\sin \frac{2\pi}{4ps} \sin \frac{2\pi}{T} t + \sin \frac{2\pi}{4ps} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2ps}\right) + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \sin \frac{2\pi}{4ps} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - (s-1)\frac{T}{2ps}\right)\right]$$

$$= \frac{E_0}{s}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps}\right) + \frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4ps}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4ps}\right) + \dots$$

$$\left.\dots + \frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - (s-1)\frac{1}{2ps} - \frac{1}{4ps}\right)\right]$$

$$= \frac{E_0}{s}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps}\right) + \frac{1}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{2p}\right)\right],$$

weil die Glieder in der Mitte verschwinden. Der letztere Ausdruck kann wieder geschrieben werden:

$$= \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{4p} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{4p}\right).$$

Somit ist die momentane E.M.K.:

$$e_{01} = E_0 \frac{\sin \frac{2\pi}{4p}}{s \sin \frac{2\pi}{4ps}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{4p}\right)$$

$$= E_{01} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{4p}\right)$$

$$= E_0 K_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{4p}\right),$$

wo

$$K_1 = \frac{\sin \frac{2\pi}{4p}}{s \sin \frac{2\pi}{4ps}}.$$

K_1 nennen wir den E.M.K.-Faktor der p-phasigen s-Lochwickelung in Bezug auf die erste Harmonische des Drehfeldes. Für die Einlochwickelung (s = 1) ist $K_1 = 1$.

Die pro Phase induzierte effektive E.M.K. findet sich hiernach für die erste Harmonische des Drehfeldes gleich

$$E_{0\,1} = K_1 E_0 = 4{,}44\ K_1\, c\, \Phi_1\, w_1\, 10^{-8}\ \text{Volt.}$$

Betrachten wir nun zweitens irgend eine andere Harmonische der Polkurve, z. B. die m^{te}. Aus derselben entsteht die m^{te} Harmonische in der resultierenden Feldkurve. Die Periodenzahl dieser Harmonischen ist, weil sie von demselben Sinusstrome erzeugt wird, wie die erste Feldharmonische, gleich c. Bezeichnen wir die gesamte Kraftlinienzahl dieser Harmonischen mit Φ_m, so ist die von derselben induzierte effektive E.M.K.:

$$E_{0\,m} = 4{,}44\ K_m\, c\, \Phi_m\, w_1\, 10^{-8}\ \text{Volt.}$$

K_m ist der E.M.K.-Faktor der p-phasigen s-Lochwickelung in Bezug auf die m^{te} Harmonische des Feldes. K_m finden wir in ähnlicher Weise wie K_1. Die räumliche Verschiebung zweier benachbarter Nuten ist, wie gezeigt:

$$\frac{X}{2\,p\,s}.$$

Weil die m^{te} Feldharmonische $\frac{1}{m}$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ersten hat, entspricht dieser räumlichen Verschiebung eine zeitliche Verschiebung in der induzierten E.M.K. von

$$\frac{m\,T}{2\,p\,s}.$$

Die in den Spulen 1, 2, 3 . . . s induzierten E.M.Ke. sind für die m^{te} Feldharmonische:

$$\frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T} t,\ \ \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{m\,T}{2\,p\,s}\right) \ldots$$

$$\frac{E_0}{s} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - (s-1)\frac{m\,T}{2\,p\,s}\right),$$

wobei E_0 die Amplitude der E.M.K. ist für den Fall, dass pro Pol und Phase nur eine Nut vorhanden wäre. Die momentane gesamte E.M.K. in der Phase ist also:

$$e_{0\,m} = \sum_0^{s-1}\sigma\ \frac{E_0}{s} \sin \frac{2\,p}{T}\left(t - \sigma\,\frac{m\,T}{2\,p\,s}\right).$$

Hieraus findet man durch dieselbe Umformung wie vorhin den E.M.K.-Faktor der p-phasigen s-Lochwickelung in Bezug auf die m^{te} Harmonische des Feldes:

$$K_m = \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \cdot \sin m \frac{2\pi}{4ps}}.$$

Ist uns nun die Form der Polkurve und daraus die Grössen Φ_1, Φ_3, ... Φ_m bekannt, so können wir hieraus für einen sinusförmigen Strom die einzelnen induzierten E.M.Ke.

$$E_{0\,1},\ E_{0\,3} \ldots E_{0\,m}$$

berechnen. Diese E.M.Ke. sind ebenfalls alle von Sinusform mit derselben Periodenzahl wie der zugeführte Strom. Die im ganzen induzierte E.M.K. in einer Phase der primären Wickelung ist

$$\Sigma E_{0\,m}.$$

Dabei ist zu beachten, dass die induzierten Spannungen E_0 nicht immer dieselbe Phase zu haben brauchen; im allgemeinen ist deswegen die Summe geometrisch zu bilden.

Wir sehen also, dass von einem Sinusstrom eine Sinusspannung induziert wird, unabhängig von der Form des rotierenden Feldes. Dasselbe gilt für alle Harmonischen des Stromes; ferner sind die E.M.K.-Faktoren K unabhängig von der Periodenzahl des Stromes, sie sind also für die n^{te} Stromharmonische dieselben wie für die erste.

Die effektive E.M.K. $E_{0\,n\,m}$ von der Periodenzahl n c, welche von der $n\,m^{ten}$ Harmonischen des resultierenden Feldes mit der Linienzahl $\Phi_{n\,m}$ pro halbe Welle (Pol) in einer Phase der primären Wickelung erzeugt wird, ist:

$$E_{0\,n\,m} = 4{,}44\ K_m\, n\, c\, \Phi_{n\,m}\, w_1\, 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Und die gesamte E.M.K. von der Periodenzahl n c, die induziert wird, ist

$$E_{0\,n} = \Sigma E_{0\,n\,m},$$

wobei die Summation geometrisch auszuführen ist und sich über alle Feldharmonischen m erstrecken soll.

Nehmen wir nun bei offener sekundärer Wickelung (Leerlauf) wiederum einen sinusförmigen, vorläufig als wattlos gedachten primären Strom J_0 an, bezeichne ferner Φ' den gesamten magnetischen Kraft-

fluss pro Pol und Phase (Inhalt einer halben Welle der Polkurve), so ist

$$\Phi' = \sqrt{2}\,\frac{w_1 J_0}{P R},$$

wobei R = magnetischer Widerstand (Reluktanz) im Luftraum pro Pol, P = gesamte Polzahl, w_1 = Windungszahl pro Phase.

Diese Gleichung ist gültig unter der Voraussetzung, dass alle Φ' Kraftlinien eines Pols durch alle $\frac{w_1}{P}$ Windungen eines Pols hindurchtreten. Dies würde nur bei einer Einlochwickelung der Fall sein. Wir nehmen zunächst eine solche Wickelung an. Wir zerlegen die Polkurve, deren Inhalt gleich Φ', in ihre einzelnen Sinuswellen, deren Inhalt bezw.

$$\Phi_1'; \ \Phi_3'; \ \Phi_5' \ldots \Phi_m'$$

ist. Hierin setzen wir:

$$\Phi_1' = f_1\,\Phi'; \ \Phi_3' = f_3\,\Phi' \ldots \Phi_m' = f_m\,\Phi'.$$

Die magnetische Strömung pro Pol des resultierenden Drehfeldes für die einzelnen Harmonischen, oder der Inhalt pro halbe Welle der resultierenden Feldkurve der einzelnen Harmonischen ist:

$$\Phi_1 = \frac{p}{2}\,\Phi_1' = \frac{p}{2}\,f_1\,\Phi',$$

$$\Phi_3 = \frac{p}{2}\,\Phi_3' = \frac{p}{2}\,f_3\,\Phi' \quad \text{u. s. w.}$$

Für die m^{te} Harmonische der resultierenden Feldkurve ist

$$\Phi_m = \frac{p}{2}\,f_m\,\Phi',$$

wobei p wie früher gleich Phasenzahl des Systems. Für alle m, welche durch p teilbar sind, ist, sofern $p > 1$, $\Phi_m = 0$. Hier führen wir den Wert von Φ' ein und erhalten:

$$\Phi_m = \frac{p}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{R}\,\frac{w_1}{P}\,f_m\,J_0.$$

Diesen Wert von Φ_m setzen wir nun in den früher gefundenen Ausdruck für E_{0m} ein und bekommen:

$$E_{0m} = 4{,}44\,\frac{p}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{R}\,\frac{w_1^2}{P}\,c\,f_m\,K_m\,J_0\,10^{-8}\ \text{Volt}.$$

Den Faktor f_m bezeichnen wir passend als den AW-Faktor der Wickelung in Bezug auf die m^{te} Harmonische des resultierenden Feldes.

Drücken wir nun das Verhältnis zwischen der wattlosen Komponente des Magnetisierungsstromes und der von der m^{ten} Harmonischen des Feldes induzierten Spannung durch den Faktor b_{0m} aus, indem wir setzen:

$$J_{0m} = b_{0m} E_{0m},$$

wobei

$$b_{0m} = \frac{10^8 R P}{4{,}44 \frac{p}{2} \sqrt{2}\, w_1^2 c f_m K_m},$$

so ist b_{0m} die Susceptanz des Stromkreises in Bezug auf die m^{te} Harmonische des Feldes. Weil alle Feldharmonischen m von demselben sinusförmigen Magnetisierungsstrome erzeugt werden, ist:

$$J_0 = J_{01} = J_{02} = \ldots = J_{0m} = b_{01} E_{01} = b_{02} E_{02} = \ldots = b_{0m} E_{0m}.$$

Die gesamte E.M.K., die von dem Sinusstrome induziert wird, und welche ebenfalls von Sinusform ist, ist somit:

$$\Sigma E_{0m} = J_0 \Sigma \frac{1}{b_{0m}}.$$

Die Summation ist, wie früher gesagt, im allgemeinen geometrisch zu bilden. In einem p-Phasensystem ($p > 1$) sind alle b_m, für welche m durch p teilbar ist, unendlich, also $\frac{1}{b_{0m}} = 0$.

Die gegebene Entwickelung, welche für einen Sinusstrom gilt, ist für jede beliebige Periodenzahl dieses Stromes gültig; sie gilt also auch, wenn man die Periodenzahl auf das n-fache vergrössert. Dabei bekommt man aber die n-fache Harmonische des Stromes mit der Periodenzahl n c. Für die n m^{te} Harmonische des Feldes ist also:

$$b_{0nm} = \frac{10^8 R P}{4{,}44 \frac{p}{2} \sqrt{2}\, w_1^2 n c f_m K_m} = \frac{b_{0m}}{n}.$$

Die induzierte Spannung der n-fachen Stromharmonischen ist somit die geometrische Summe:

$$\Sigma E_{0nm} = J_{0n} \Sigma \frac{1}{b_{0nm}} = J_{0n} \Sigma \frac{n}{b_{0m}},$$

gebildet über alle Feldharmonischen m wie oben.

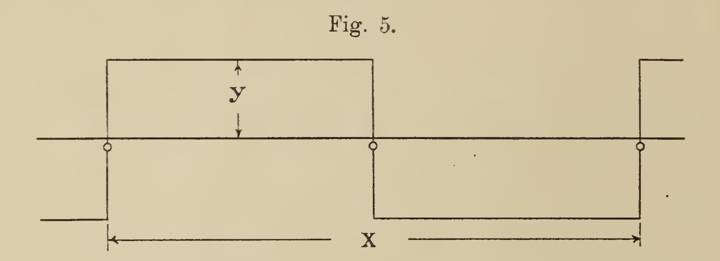
Wir haben den AW-Faktor definiert als das Verhältnis:

$$f_m = \frac{\Phi_m'}{\Phi'},$$

wo Φ_m' gleich dem Inhalt der halben Welle der m^{ten} Polkurvenharmonischen und Φ' gleich dem Inhalt derjenigen Polkurve ist, die sich bei der Einlochwickelung ergeben würde. Letztere ist immer ein Rechteck.

Betrachten wir nun zuerst die Einlochwickelung; die konstante Ordinate sei Y, die Wellenlänge wie früher X (Fig. 5).

Fig. 5.



Wir entwickeln diese Kurve in eine Fouriersche Reihe:

$$Y = A_1 \sin \frac{2\pi}{X} x + A_3 \sin 3 \frac{2\pi}{X} x + \ldots A_m \sin m \frac{2\pi}{X} x + \ldots,$$

wo x die veränderliche Abscisse bedeutet. Die Amplitude der m^{ten} Welle ist:

$$A_m = \frac{4}{X} \int_0^{\frac{X}{2}} Y \sin m \frac{2\pi}{X} x \, dx = \frac{1}{m} \frac{4}{\pi} Y$$

und hieraus:

$$f_m = \frac{\frac{1}{m} \frac{4}{\pi} Y \int_0^{\frac{X}{2}} \sin m \frac{2\pi}{X} x \, dx}{Y \frac{X}{2}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{m^2}.$$

Hierbei muss die Beziehung bestehen:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi_1' + \Phi_3' + \Phi_5' + \ldots + \Phi_m' + \ldots \\ &= f_1 \Phi' + f_3 \Phi' + f_5 \Phi' + \ldots + f_m \Phi' + \ldots \\ &= \Phi' \Sigma f_m; \end{aligned}$$

also

$$\Sigma f_m = 1,$$

wenn die Summation über alle ungeraden m gebildet wird. Es ist also:

$$\frac{8}{\pi^2} \Sigma \frac{1}{m^2} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \ldots \right) = 1.$$

Der AW-Faktor der Einlochwickelung in Bezug auf die erste Harmonische der Polkurve ist

$$f_1 = \frac{8}{\pi^2} = 0{,}81.$$

Die höheren Faktoren nehmen, wie man sieht, schnell ab, so ist z. B.

$$f_3 = \frac{0{,}81}{9} = 0{,}09.$$

Haben wir dagegen die w_1 Windungen in s Nuten pro Pol und Phase verteilt, so ist die räumliche Verschiebung zweier benachbarter Spulen

$$\frac{X}{2ps}.$$

Die jeder Spule entsprechende Polkurve ist ein Rechteck von der Höhe

$$y = \frac{1}{s} Y;$$

wo Y die Höhe der Polkurve darstellt für den Fall, dass die w_1 Windungen in einer Nut pro Pol und Phase untergebracht wären. Wir bekommen somit s Polkurven von rechteckiger Form und von der gleichen Höhe y, dieselben sind im Raume um $\frac{X}{2ps}$ verschoben.

Wir entwickeln nun diese s Rechtecke in Fouriersche Reihen, indem wir die Ordinaten derselben mit y_1, $y_2 \ldots y_s$ bezeichnen.

$$y_1 = \frac{1}{s} A_1 \sin \frac{2\pi}{X} x + \frac{1}{s} A_3 \sin 3 \frac{2\pi}{X} x + \ldots \frac{1}{s} A_m \sin m \frac{2\pi}{X} x + \ldots,$$

$$y_2 = \frac{1}{s} A_1 \sin \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{X}{2ps}\right) + \frac{1}{s} A_3 \sin 3 \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{X}{2ps}\right)$$
$$+ \ldots \frac{1}{s} A_m \sin m \frac{2\pi}{X} \left(x - \frac{X}{2ps}\right) + \ldots$$

. . . .

$$y_s = \frac{1}{s} A_1 \sin \frac{2\pi}{X} \left(x - (s-1) \frac{X}{2ps}\right) + \frac{1}{s} A_3 \sin 3 \frac{2\pi}{X} \left(x - (s-1) \frac{X}{2ps}\right)$$
$$+ \ldots \frac{1}{s} A_m \sin m \frac{2\pi}{X} \left(x - (s-1) \frac{X}{2ps}\right) + \ldots$$

Hierin haben A_1, A_3, … A_m dieselben Werte wie früher, also

$$A_m = \frac{1}{m} \frac{4}{\pi} Y.$$

Wir nehmen nun die m^{te} Harmonische der Polkurve und bezeichnen ihre Ordinate in einem beliebigen Punkt x des Umfanges mit y_m, diese Ordinate ist

$$y_m = \frac{1}{s} A_m \left[\sin m \frac{2\pi}{X} x + \sin m \frac{2\pi}{X}\left(x - \frac{X}{2ps}\right) + \ldots \sin m \frac{2\pi}{X}\left(x - (s-1)\frac{X}{2ps}\right)\right].$$

Durch Multiplikation auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit

$$\sin m \frac{2\pi}{4ps}$$

erhält man:

$$y_m = \frac{1}{s} A_m \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{\sin m \frac{2\pi}{4ps}} \sin m\, 2\pi \left(\frac{x}{X} + \frac{1}{4ps} - \frac{1}{4p}\right).$$

Die Amplitude dieser Welle ist:

$$A_m \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \sin m \frac{2\pi}{4ps}} = \frac{1}{m} \frac{4}{\pi} Y \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \sin m \frac{2\pi}{4ps}}$$

und ihr Inhalt:

$$\Phi_m' = \frac{8}{\pi^2} \frac{X}{2m^2} Y \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \sin m \frac{2\pi}{4ps}}.$$

Folglich ist der AW-Faktor dieser Harmonischen

$$f_m = \frac{\Phi_m'}{\Phi_m} = \frac{\Phi_m'}{\frac{1}{2} XY} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \sin m \frac{2\pi}{4ps}}$$

Früher haben wir für den E.M.K.-Faktor gefunden:

$$K_m = \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \,.\, \sin m \frac{2\pi}{4ps}}.$$

Zwischen dem AW-Faktor und dem E.M.K.-Faktor einer Harmonischen m besteht somit das Verhältnis

$$\frac{f_m}{K_m} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{m^2}.$$

Daselbe ist unabhängig von der Phasenzahl des Systems und von der Nutenzahl der Wickelung.

2. Die Faktoren der Käfigwickelung.

Sehen wir vorläufig von dem Widerstande der Endverbindungen ab, so können wir eine Käfigwickelung als eine sterngeschaltete Wickelung betrachten, die ebenso viele Phasen besitzt, als Drähte (oder Stäbe) pro Wellenlänge des Feldes vorhanden sind; denn in jedem Stab wird von einem Sinusfeld eine E.M.K. induziert, deren Phase der Stellung des betreffenden Stabes am Umfange des Ankers entspricht. In einer Maschine, deren ganze Polzahl gleich P ist, haben wir uns $\frac{P}{2}$ solche Mehrphasensysteme parallel geschaltet zu denken. Pro Phase ist ein Stab also die Windungszahl $w = \frac{1}{2}$ zu setzen. Jede Phase hat eine Einlochwickelung, deren Faktoren, wie wir gesehen haben,

$$K_1 = 1; \; f_1 = \frac{8}{\pi^2} = 0{,}81$$

sind.

Einer höheren Feldharmonischen gegenüber (z. B. der m^{ten}) verhält sich die Käfigwickelung ebenfalls als eine mehrphasige Einlochwickelung, nur ist die Phasenzahl der m^{ten} Harmonischen gegenüber nur $\frac{1}{m}$ von derjenigen in Bezug auf das Grundfeld. Ist somit die Stabzahl der Wickelung pro doppelte Polteilung oder pro Wellenlänge X des Grundfeldes gleich p^0, so haben wir in Bezug auf das Grundfeld die Phasenzahl gleich p^0, und in Bezug auf die m^{te} Feldharmonische dieselbe gleich $\frac{p^0}{m}$ zu setzen. Die Faktoren K und f bleiben dabei für alle Feldharmonischen konstant, und zwar ist wie für K_1 und f_1 der Einlochwickelung:

$$K_m = 1; \; f_m = \frac{8}{\pi^2} = 0{,}81.$$

Weil, wie gezeigt, in einer Maschine mit P Polen $\frac{P}{2}$ p^0-Phasen-

systeme parallel geschaltet sind, und weil jedes System nur eine halbe Windung besitzt, so haben wir pro Phase eine Windungszahl $w = \frac{P}{4}$ einzuführen. Bezeichnen wir ferner mit r_s den Widerstand und mit x_s die Reaktanz eines Stabes, so haben wir für eine Windung, gleich zwei Stäben, den Widerstand $2\,r_s$ und die Reaktanz $2\,x_s$; somit ist für die ganze Phase von $\frac{P}{4}$ Windungen

$$\text{der Widerstand} \quad = \frac{P}{2}\,r_s$$

$$\text{und die Reaktanz} = \frac{P}{2}\,x_s$$

einzuführen.

Es sind nun die Widerstände der beiden Ringe, welche die Enden der Stäbe an jeder Stirnfläche des Ankers miteinander verbinden, zu berücksichtigen. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass der Ring an der einen Stirnfläche des Ankers einen sehr grossen Querschnitt hat, so dass wir dessen Widerstand vernachlässigen können, ebenso denken wir uns diesen Ring als induktionsfrei, während wir uns den Widerstand und die Selbstinduktion des zweiten Ringes verdoppelt denken. Durch diese Annahme sind die Widerstände und die Reaktanzen aller Stromwege des Kurzschlussankers unverändert geblieben. Fassen wir nun die p^0 Stäbe, welche auf der doppelten Polteilung des Ankers liegen, ins Auge, so bilden dieselben ein p^0-phasiges Sternsystem, dessen neutraler Punkt 0 von dem Kurzschlussring mit dem Widerstand Null gebildet wird. Dies Sternsystem ist gewissermassen als der Generator aufzufassen; denn in den sterngeschalteten Ankerstäben werden die Ströme erzeugt. Die zwischen den einzelnen Stäben liegenden Ringsegmente des Kurzschlussringes mit doppeltem Widerstand bilden die in Ring geschaltete Belastung dieses Mehrphasensystems. Die Aufgabe ist nun unter Annahme eines sinusartigen Feldes auf den einfachen Fall eines symmetrischen Mehrphasensystems mit dem Generator in Stern- und der Belastung in Ringschaltung reduziert.

Ist E_s die induzierte E.M.K., J_s der Strom und Z_s die Impedanz eines Stabes, so haben wir in symbolischer Schreibweise für die Spannung E_s', zwischen dem neutralen Punkte 0 und dem Endpunkte des Stabes (Phasenspannung der Sternschaltung)

$$E_s' = E_s - Z_s\,J_s.$$

Setzen wir der Kürze wegen die komplexe Grösse

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p^0} + j\sin\frac{2\pi}{p^0},$$

so ist bekanntlich [1]) in einem p^0-Phasen-Sternsystem die verkettete Spannung (hier Spannung zwischen zwei benachbarten Stabenden) gleich

$$(1-\varepsilon)\,.\,E_s' = J_r Z_r,$$

wobei J_r den Strom und Z_r die Impedanz eines Ringsegmentes zwischen zwei benachbarten Stäben bedeuten. Zwischen dem verketteten und dem unverketteten Strom muss die Beziehung bestehen

$$J_r = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}J_s,$$

somit

$$E_s = J_s\left(Z_s - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}Z_r\right).$$

Hierin ist

$$1-\varepsilon = 1-\cos\frac{2\pi}{p^0} - j\sin\frac{2\pi}{p^0}$$
$$= k(\cos\alpha - j\sin\alpha),$$

wobei

$$k = 2\sin\frac{\pi}{p^0},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{p^0}}{2\sin\frac{\pi}{p^0}} = \sin\frac{\pi}{p^0},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\frac{2\pi}{p^0}}{2\sin\frac{\pi}{p^0}} = \cos\frac{\pi}{p^0}.$$

Ferner ist

$$(1-\varepsilon)^2 = k^2(\cos 2\alpha - j\sin 2\alpha),$$
$$= -k^2\left(\cos\frac{2\pi}{p^0} + j\sin\frac{2\pi}{p^0}\right),$$
$$= -k^2\varepsilon.$$

Man hat somit

$$E_s = J_s\left(Z_s + \frac{Z_r}{k^2}\right).$$

Die Kurzschlussringe wirken somit gerade so, als ob die Impedanz

[1]) Vergl. Steinmetz, Alternating Current Phenomena, Cpt. XXIV u. XXVI.

jedes Stabes um die Grösse $\frac{Z_r}{k^2}$ vergrössert wäre. Hierbei ist Z_r die doppelte Impedanz von dem Stück eines Ringes, das zwischen zwei benachbarten Stäben liegt. Seien r_r und x_r bezw. der doppelte Widerstand und die doppelte Reaktanz eines solchen Stückes, so ist der reduzierte Widerstand eines Stabes

$$r_s' = r_s + \frac{r_r}{k^2}$$

und die reduzierte Reaktanz

$$x_s' = x_s + \frac{x_r}{k^2},$$

wobei

$$k = 2 \sin \frac{\pi}{p^0}.$$

Für eine Phase der Sekundärwickelung haben wir dann nach dem Früheren zu setzen:

$$\text{Widerstand} = \frac{P}{2} r_s',$$

$$\text{Reaktanz} = \frac{P}{2} x_s',$$

wobei die Windungszahl der Phase gleich $\frac{P}{4}$ zu setzen ist.

Ist das Feld nicht von Sinusform, so kann man sich dasselbe, wie wir gesehen haben, aus Harmonischen zusammengesetzt denken; jede dieser Harmonischen erzeugt in dem rotierenden Anker einen sinusförmigen Mehrphasenstrom. Weil die von den einzelnen Harmonischen erzeugten E.M.Ke. und Ströme bei rotierendem Anker alle verschiedene Periodenzahlen haben, so verlaufen sie vollständig unabhängig voneinander, und man kann die Wirkung jeder Feldharmonischen auf den Anker für sich betrachten.

Wie man für ein höheres Feld die Wickelungsfaktoren K_m und f_m bestimmt, haben wir schon gesehen; es bleibt nur noch die Bestimmung der Impedanz.

Um die Impedanz der Käfigwickelung in Bezug auf die m^{te} Harmonische zu bestimmen, kann man die eben durchgeführte Rechnung wiederholen, hierbei bleibt alles unverändert bis auf die Grösse k, welche sich entsprechend der Aenderung der Phasenzahl ändert. Für das m^{te} Feld ist

$$k_m = 2 \sin \frac{m\pi}{p^0}.$$

Hier sind somit die reduzierten Werte von Widerstand und Reaktanz:

$$r_{s\,m}' = r_s + \frac{r_r}{k_m^{\,2}}; \qquad x_{s\,m}' = x_s + \frac{x_r}{k_m^{\,2}}.$$

3. Der Ersatzstromkreis der Mehrphasenmaschine.

Nachdem wir nun die Faktoren für die gewöhnlichsten Wickelungen behandelt haben, gehen wir zu der Betrachtung der Wirkungsweise der Maschine bei geschlossener Sekundärwickelung über. Wir betrachten zuerst wieder die Verhältnisse unter der Annahme eines sinusförmigen zugeführten Stromes. Die Polkurve soll aus einer beliebigen Zahl von höheren Harmonischen bestehen. Der Anker rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit ω^0, während die Rotationsgeschwindigkeit der einzelnen Harmonischen des resultierenden, durch primäre und sekundäre Wickelung hindurchtretenden, Hauptfeldes mit ω_1, $\omega_3 \ldots \omega_m$ bezeichnet sein möge.

Die Schlüpfungen der sekundären Wickelung in Bezug auf die einzelnen Harmonischen des resultierenden Feldes seien bezw. s_1, $s_2 \ldots s_m$. Wir haben dann:

$$s_1 = \frac{\omega_1 - \omega^0}{\omega_1}; \; s_3 = \frac{\omega_3 - \omega^0}{\omega_3}; \ldots s_m = \frac{\omega_m - \omega^0}{\omega_m}.$$

Für die m^{te} Feldharmonische haben wir die in der primären Wickelung pro Phase induzierte E.M.K.

$$E_{0\,m} = 4{,}44\, K_m\, c\, \Phi_m\, w_1\, 10^{-8} \text{ Volt.}$$

In der sekundären Wickelung wird von derselben Feldharmonischen induziert

$$E_{0\,m}' = 4{,}44\, K_m'\, s_m\, c\, \Phi_m\, w_2\, 10^{-8} \text{ Volt}$$

$$= \frac{s_m\, K_m'\, w_2}{K_m\, w_1}\, E_{0\,m} \text{ Volt.}$$

Hierbei bedeutet K_m' den E.M.K.-Faktor, w_2 die Windungszahl einer Phase der sekundären Wickelung.

Der hierdurch erzeugte Strom in der Sekundärwickelung ist

$$J_m' = \frac{E_m'}{Z_m'} \text{ Amp.}$$

Die Impedanz Z_m' einer Phase der Sekundärwickelung in Bezug auf den von der m^{ten} Feldharmonischen erzeugten Strom ist in komplexer Schreibweise

$$Z_m' = r_2 - j\, s_m\, x_2,$$

wobei r_2 den Ohmschen Widerstand, x_2 die Reaktanz bei Periodenzahl c einer Phase der sekundären Wickelung bedeutet. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{r_2}{s_m} = \rho_m,$$

so kann man schreiben

$$J_m' = \frac{s_m K_m' w_2}{K_m w_1} \frac{E_m}{r_2 - j s_m x_2} = \frac{K_m' w_2}{K_m w_1} \frac{E_m}{\rho_m - j x_2}.$$

Um die M.M.K. dieses sekundären Stromes zu kompensieren, muss der primäre Strom eine Komponente

$$J_{2m} = \frac{f_m' w_2 p_2}{f_m w_1 p_1} J_m' = \frac{p_2 K_m' f_m' w_2^2}{p_1 K_m f_m w_1^2} \frac{E_m}{\rho_m - j x_2}$$

$$= \frac{1}{a_m} E_m Y_{2m}$$

enthalten. Hierbei ist

$$\frac{p_2 K_m' f_m' w_2^2}{p_1 K_m f_m w_1^2} = \frac{1}{a_m}$$

gleich dem Uebersetzungsverhältnis von Primärwickelung auf Sekundärwickelung für die m^{te} Feldharmonische, während

$$\frac{1}{\rho_m - j x_2} = Y_{2m} = g_{2m} + j b_{2m}$$

die sekundäre Admittanz für die m^{te} Feldharmonische bei der Schlüpfung s_m darstellt.

Eine weitere Komponente des primären Stromes ist der Magnetisierungsstrom; derselbe ist, abgesehen von der Energiekomponente,

$$J_{0m} = j b_{0m} E_{0m},$$

wobei nach S. 25

$$b_{0m} = \frac{10^8 RP}{4{,}44 \frac{p}{2} \sqrt{2} w_1^2 c K_m f_m}.$$

Der gesamte Primärstrom ist somit

$$J_1 = J_{2m} + J_{0m} = E_{0m} \left[\frac{1}{a_m} (g_{2m} + j b_{2m}) + j b_{0m}\right].$$

Hieraus sieht man, dass man sich die in Fig. 6 dargestellte Ersatzschaltung denken kann.

Die von der m^{ten} Feldharmonischen induzierte E.M.K. E_{0m} kann als die Klemmenspannung von zwei parallel geschalteten Stromzweigen

angesehen werden; hiervon enthält der eine Zweig mit dem Strom J_{2m} die Admittanz

$$\frac{1}{a_m} Y_{2m} = \frac{1}{a_m} (g_{2m} + j\, b_{2m})$$

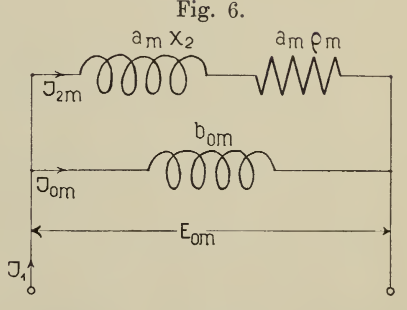
oder die Impedanz

$$a_m Z_{2m} = a_m (\rho_m - j\, x_2),$$

während der zweite Stromzweig mit dem Strome J_{0m} nur die Susceptanz b_{0m} enthält.

Wenn wir nun dem Indexe m die verschiedenen Werte 1, 3, 5 u. s. w. beilegen, so erhalten wir in der primären Wickelung die induzierten E.M.Ke. E_{01}, E_{03}, E_{05} u. s. w. und die gesamte von allen Harmonischen des resultierenden Feldes induzierte E.M.K. ist gegeben durch die geometrische Summe

Fig. 6.



$$E_0 = E_{01} + E_{03} + E_{05} + \ldots . E_{0m} + \ldots$$

Für alle Harmonischen gilt

$$J_{21} + J_{01} = J_{23} + J_{03} = J_{2m} + J_{0m} = J_1.$$

Wenn wir somit alle Feldharmonischen in Betracht ziehen, so bekommen wir den in Fig. 7 abgebildeten Ersatzstromkreis.

Bezeichne E_1 die primäre Klemmenspannung des Motors, so hat man

$$E_1 = E_0 + J_1 Z_1 = E_0 + \frac{J_1}{Y_1},$$

wobei

$$Z_1 = r_1 - j\, x_1,$$
$$Y_1 = g_1 + j\, b_1$$

bezw. die Impedanz und Admittanz der primären Wickelung bedeuten.

Die Energiekomponente des Erregerstromes haben wir bis jetzt vernachlässigt. Machen wir der Einfachheit wegen die Annahme, dass die Magnetisierungsarbeit nur von dem Erregerstrome der ersten Feldharmonischen geleistet wird, so müssen wir diesen Erregerstrom schreiben:

$$J_{01} = E_{01} Y_{01} = E_{01} (g_0 + j\, b_{01}),$$

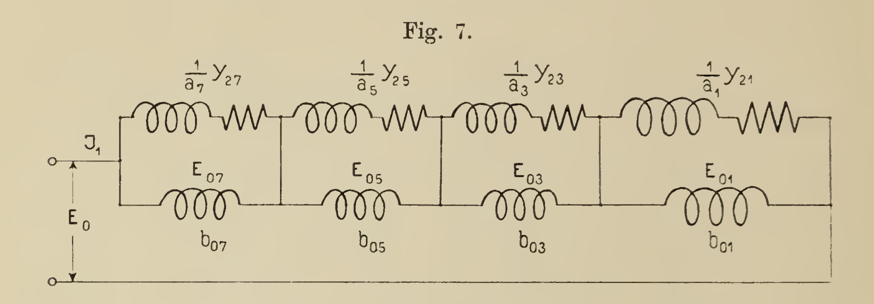
wobei

$$E_{01}^2 g_0 = \text{Effektverlust im Eisen pro Phase.}$$

Mit Berücksichtigung dieser Eisenverluste sowie der Admittanz in der primären Wickelung erhalten wir nun das in Fig. 8 abgebildete vollständige Ersatzschema mit Berücksichtigung der höheren Feldharmonischen bis mit der siebenten.

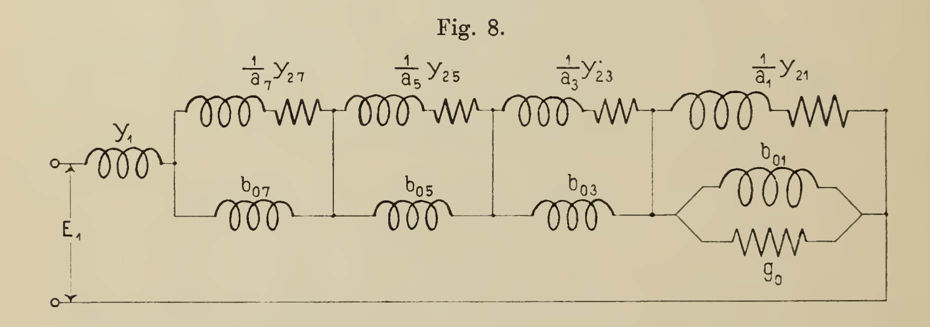
Der Ersatzstromkreis setzt sich somit aus der konstanten primären Admittanz Y_1 in Hintereinanderschaltung mit einer Serie von Leitungs-

Fig. 7.



elementen zusammen. Jedes dieser Leitungselemente besteht aus zwei parallel geschalteten Zweigen, wovon der eine eine mit der Belastung variierende Admittanz $\frac{1}{a_m} Y_{2m}$ besitzt, während der andere eine konstante Susceptanz b_{0m} enthält. Für die Grundschwingung des Feldes

Fig. 8.



ist statt der konstanten Susceptanz eine konstante Admittanz $Y_{01} = g_0 + j\, b_{01}$ zu setzen. Jeder Harmonischen m entspricht ein solches Leitungselement.

Wir wollen zuerst die Aenderung von $\frac{1}{a_m} Y_{2m}$ bei Aenderung der Belastung (oder Schlüpfung) untersuchen. Weil $\frac{1}{a_m}$ für eine Harmonische konstant ist, genügt die Untersuchung von Y_{2m}.

Wie gezeigt, ist

$$Y_{2m} = \frac{1}{\rho_m - j x_2} = g_{2m} + j b_{2m},$$

wo

$$\rho_m = \frac{r_2}{s_m}$$

und

$$g_{2m} = \frac{\rho_m}{\rho_m{}^2 + x_2{}^2}; \; b_{2m} = \frac{x_2}{\rho_m{}^2 + x_2{}^2}$$

$$\rho_m = x_2 \frac{g_{2m}}{b_{2m}}.$$

Hieraus hat man:

$$b_{2m} = \frac{1}{x_2\left(\frac{g_{2m}{}^2}{b_{2m}{}^2} + 1\right)},$$

$$\frac{x_2}{b_{2m}} = \frac{1}{g_{2m}{}^2 + b_{2m}{}^2},$$

$$g_{2m}{}^2 + b_{2m}{}^2 - \frac{b_{2m}}{x_2} = 0.$$

Wenn man hier rechts und links $\frac{1}{4 x_2{}^2}$ addiert, kommt

$$g_{2m}{}^2 + \left(b_{2m} - \frac{1}{2 x_2}\right)^2 = \frac{1}{4 x_2{}^2}.$$

Betrachtet man g_{2m} als Ordinate und b_{2m} als Abscisse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so sieht man, dass diese Gleichung einen Kreis darstellt, dessen Zentrum auf der Abscissenachse im Abstande $\frac{1}{2 x_2}$ vom Anfangspunkte liegt, und dessen Radius gleich $\frac{1}{2 x_2}$ ist. Die Admittanzen Y_{2m} sind also nach Grösse und Richtung als Strahlen vom Anfangspunkte aus zu diesem Kreise gegeben. Bilden wir nun für das m^{te} Element (m^{te} Harmonische) die Admittanz der Parallelschaltung von $\frac{1}{a_m}$ Y_{2m} und b_{0m}, und bezeichnen wir diese Admittanz mit $Y_m' = g_m' + j b_m$, so haben wir

$$g_m' + j b_m' = \frac{1}{a_m} g_{2m} + j\left(\frac{1}{a_m} b_{2m} + b_{0m}\right)$$

und hieraus

$$g_{2m} = a_m g_m',$$
$$b_{2m} = a_m (b_m' - b_{0m}).$$

Setzt man dies in die Kreisgleichung hinein, so kommt

$$g_m'^2 + \left[b_m' - \left(b_{0m} + \frac{1}{2\,a_m\,x_2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4\,a_m^2\,x_2^2}.$$

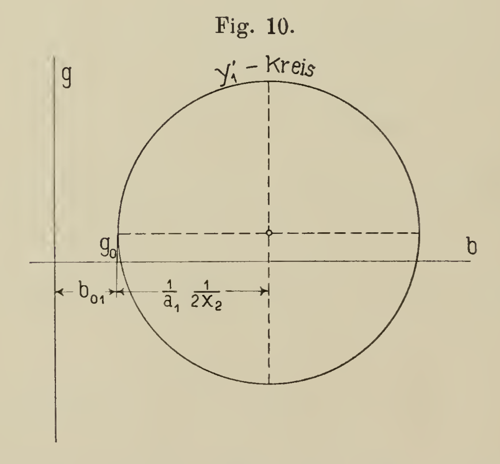
Für das m^{te} Element des Ersatzstromkreises oder für die m^{te} Harmonische des Drehfeldes bekommt man also den in Fig. 9 abgebildeten Admittanzkreis.

Fig. 9.

Für das erste Element oder für die Grundschwingung des Feldes hat man den in Fig. 10 gegebenen Admittanzkreis mit der Gleichung:

$$(g_1' - g_0)^2 + \left[b_1' - \left(b_{01} + \frac{1}{2\,a_1\,x_2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4\,a_1^2\,x_2^2}.$$

Fig. 10.



Das allgemeine Problem würde nun darin bestehen, die resultierende Admittanz zwischen den Klemmen der Maschine, also der

Hintereinanderschaltung der einzelnen Admittanzen Y_1, Y_1', Y_3' ... Y_m' für die verschiedenen Schlüpfungen zu bestimmen. Die Schlüpfung s_m der sekundären Wickelung in Bezug auf die m[te] Harmonische des Feldes liesse sich aus der Schlüpfung s_1 der Grundharmonischen nach den folgenden Formeln bestimmen:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1} = s_1; \qquad \frac{\omega_m - \omega_0}{\omega_m} = s_m,$$

wobei:

ω_1 und ω_m gleich Winkelgeschwindigkeit der ersten resp. der m[ten] Feldharmonischen,

ω_0 gleich Winkelgeschwindigkeit der sekundären Wickelung.

Hieraus hat man:

$$\omega_1 - \omega_m = s_1 \omega_1 - s_m \omega_m.$$

Ferner ist

$$\omega_m = \pm \frac{\omega_1}{m}.$$

Somit ist

$$s_m = \pm 1 - m + m s_1.$$

Das positive Zeichen gilt, wenn die m[te] Harmonische die gleiche Drehrichtung wie die erste hat, sonst gilt das negative Zeichen.

Die vollständige Lösung dieses Problems ist umständlich und bietet kein grosses praktisches Interesse. Wir werden uns damit begnügen, im folgenden eine angenäherte Lösung zu geben.

4. Vereinfachter Ersatzstromkreis.

a) Die Sekundärwickelung ist eine Phasenwickelung.

In dem Ausdrucke für die Susceptanz in Bezug auf die m[te] Feldharmonische

$$b_{0m} = \frac{10^8 \, R P}{4{,}44 \, \frac{p}{2} \sqrt{2} \, w_1^2 \, c \, K_m \, f_m}$$

wird das Produkt

$$K_m \, f_m$$

sehr klein, sobald $m > 1$ wird.

Die entsprechende Reaktanz

$$x_{0m} = \frac{1}{b_{0m}}$$

wird dann bei zunehmendem m immer kleiner.

Untersuchen wir andererseits die Grössenordnung der zur Susceptanz b_{0m} in der Ersatzschaltung parallel geschalteten Impedanz

$$a_m (\rho_m - j x_2),$$

so sehen wir zwar, dass

$$\rho_m = \frac{r_2}{s_m} = \frac{r_2}{\pm 1 - m + m s_1}$$

bei zunehmendem m immer kleiner wird; dagegen bleibt x_2 konstant, und die Grösse

$$a_m = \frac{p_1 K_m f_m w_1^2}{p_2 K_m' f_m' w_2^2}$$

wird sich im allgemeinen nicht stark ändern, weil bei gleicher Wickelungsart primär und sekundär das Verhältnis

$$\frac{K_m f_m}{K_m' f_m'}$$

für die verschiedenen m etwa dasselbe bleiben muss und nicht sehr viel von der Einheit verschieden sein wird.

Betrachten wir nun die Ersatzschaltung, Fig. 8, und vernachlässigen wir für die höheren Werte von m die kleinen Grössen ρ_m, so können wir jedes Leitungselement der Ersatzschaltung als eine Parallelschaltung der beiden Susceptanzen

$$\frac{1}{a_m} b_{2m} = \frac{p_2 K_m' f_m' w_2^2}{p_1 K_m f_m w_1^2} \frac{1}{x_2}$$

und

$$b_{0m} = \frac{10^8 R P}{4{,}44 \frac{p}{2} \sqrt{2}\, w_1^2 c K_m f_m} = \frac{K_1 f_1}{K_m f_m} b_{01}$$

betrachten. Die gesamte Susceptanz der Parallelschaltung ist somit

$$b_m' = \frac{1}{a_m} b_{2m} + b_{0m}$$

und die Reaktanz

$$x_m' = \frac{1}{\frac{1}{a_m} b_{2m} + b_{0m}}$$

$$= \frac{1}{\frac{K_1 f_1}{K_m f_m} \left[\frac{p_2}{p_1} \frac{K_m' f_m'}{K_1 f_1} \frac{w_2^2}{w_1^2} \frac{1}{x_2} + b_{01} \right]}.$$

Die gesamte Reaktanz aller höheren Feldharmonischen ist somit

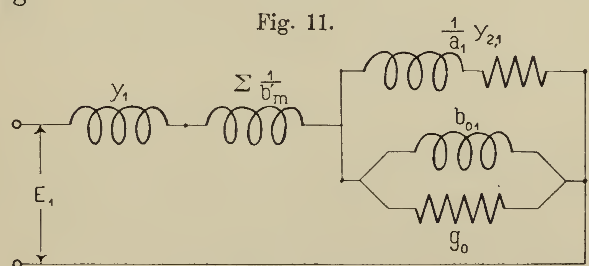
$$\Sigma x_m' = \frac{1}{K_1 f_1} \Sigma \frac{K_m f_m}{\frac{p_2}{p_1} \frac{K_m' f_m'}{K_1 f_1} \frac{w_2^2}{w_1^2} \frac{1}{x_2} + b_{01}}.$$

Für die höheren Werte von m kann man hier ohne grossen Fehler das erste Glied im Nennerausdruck gegenüber dem zweiten vernachlässigen; man hat dann für diese Reaktanz den Wert

$$\Sigma x_m' = \frac{\Sigma K_m f_m}{K_1 f_1 b_{01}} = \Sigma \frac{1}{b_m'}.$$

Hieraus erhalten wir die in Fig. 11 abgebildete vereinfachte Ersatzschaltung.

Fig. 11.



Die Wirkung der höheren Feldharmonischen ist also im wesentlichen mit einer Vergrösserung der primären Reaktanz der Maschine als gleichwertig zu betrachten. Diese Vergrösserung der Reaktanz lässt sich leicht bestimmen, wenn man für die primäre Wickelung die Summe $\Sigma K_m f_m$ kennt. In einem folgenden Abschnitte über Beispiele von Wickelungsfaktoren ist diese Summe für einige Wickelungen ausgerechnet.

b) Die Sekundärwickelung ist eine Käfigwickelung.

Wie gezeigt, ist in einer Käfigwickelung die Phasenzahl (und Polzahl) unbestimmt und richtet sich nach derjenigen des primären Feldes.

In der Ersatzschaltung haben wir für das m^{te} Leitungselement (m^{te} Feldharmonische) zu setzen:

$$\text{Windungszahl } (w_2) = \frac{P}{4},$$

$$\text{Phasenzahl } (p_2) = \frac{p_2}{m},$$

$$\text{Reaktanz } (x_2) = \frac{P}{2} x_{sm}',$$

wobei

$$x_{sm}' = x_s + \frac{x_r}{k_m^2},$$

$$K_m = \frac{1}{2} \sin \frac{m\,\pi}{p_2}.$$

Führen wir diese Werte in die Formel für die gesamte Reaktanz aller höheren Feldharmonischen ein, so erhalten wir

$$\Sigma\, x_m' = \Sigma \frac{K_m\, f_m}{\frac{0{,}81}{8}\,\frac{p_2}{p_1}\,\frac{1}{m}\,\frac{P}{w_1^2}\,\frac{1}{x_{sm}'} + K_1\, f_1\, b_{0\,1}}.$$

Für die höheren Feldharmonischen kommen die Reaktanzen der Endverbindungen des Käfigankers immer weniger in Betracht, so dass wir bei $m > 1$ setzen können:

$$x_{sm}' = x_s = \text{konstant für alle } m.$$

Die Ersatzschaltung ist bei Anwendung der Käfigwickelung dieselbe wie für die Phasenwickelung; nur ist für die Käfigwickelung die zusätzliche, von den höheren Feldharmonischen herrührende Reaktanz $\Sigma\, x_m'$ kleiner als bei der Phasenwickelung.

5. Ersatzstromkreis der Einphasenasynchronmaschine.

In der Einphasenasynchronmaschine wird von der primären Wickelung eine im Raume feststehende, mit dem primären Strome periodisch wechselnde, magnetomotorische Kraft erzeugt, welche bei offener Sekundärwickelung ein ebenfalls im Raume feststehendes Wechselfeld zur Folge hat. Wie bekannt, kann man sich aber ein derartiges Wechselfeld, sofern dasselbe sinusförmig ist, aus zwei in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit rotierenden sinusförmigen Drehfeldern entstanden denken. Diese Drehfelder besitzen je die halbe Amplitude des Wechselfeldes. Ist das primäre Wechselfeld nicht sinusförmig, so kann man sich dasselbe in seine Harmonischen zerlegt und jede Harmonische durch zwei in entgegengesetzter Richtung rotierende sinusförmige Drehfelder ersetzt denken.

Die von den beiden Drehfeldern in der rotierenden Sekundärwickelung induzierten E.M.Ke. haben verschiedene Periodenzahlen und können deswegen unabhängig voneinander betrachtet werden. Dasselbe gilt für die in der rotierenden und *geschlossenen* Sekundärwickelung induzierten Ströme. Da diese Ströme für die beiden Felder nicht

die gleiche Stärke bekommen, sind die Amplituden der beiden resultierenden, durch primäre und sekundäre Wickelung hindurchtretenden Drehfelder nicht gleich, und zwar hat dasjenige Feld, was die gleiche Rotationsrichtung wie die Sekundärwickelung hat, die grössere Amplitude, während das umgekehrt rotierende die kleinere Amplitude hat.

Betrachten wir zuerst die Grundwelle der beiden Felder, und nehmen wir den primären Strom als sinusförmig an. Bezeichne Φ den Kraftfluss desjenigen Drehfeldes, das dieselbe Drehrichtung wie die Sekundärwickelung hat, und Φ' den Kraftfluss des umgekehrt rotierenden Drehfeldes. Die von dem ersten Felde, Φ, in der Primärwickelung induzierte E.M.K. ist dann:

$$E_0 = 4{,}44\, K\, c\, w_1\, \Phi\, 10^{-8} \text{ Volt},$$

wo

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{R} \frac{w_1}{P} f J_0.$$

J_0 gleich Erregerstrom in der primären Wickelung. Hieraus hat man:

$$E_0 = \frac{4{,}44 \frac{1}{2} \sqrt{2}\, K f c\, w_1^2}{10^8\, R\, P} J_0 = Z_0 J_0$$

oder

$$J_0 = \frac{1}{Z_0} E_0 = Y_0 E_0,$$

wobei Y_0 gleich Erregeradmittanz des Feldes Φ. Ist s die Schlüpfung der Sekundärwickelung in Bezug auf dies Feld, so ist die in dieser Wickelung induzierte E.M.K.:

$$s \,.\, 4{,}44\, K' w_2\, c\, \Phi\, 10^{-8} = \frac{K' w_2}{K w_1} s E_0.$$

Der Strom, der dadurch in der sekundären Wickelung entsteht, ist:

$$J_2' = \frac{s E_0}{\frac{K w_1}{K' w_2} (r_2' - j s x_2')} = \frac{E_0}{\frac{K w_1}{K' w_2} \left(\frac{r_2'}{s} - j x_2'\right)},$$

wobei r_2' den Widerstand, x_2' die Reaktanz einer sekundären Phase bedeutet. Dem Strome J_2' in der Sekundärwickelung entspricht ein Strom J_2 in der Primärwickelung, der gegeben ist durch die Beziehung:

$$J_2 = p_2 \frac{w_2}{w_1} \frac{f'}{f} J_2' = \frac{E_0}{a \left(\frac{r_2'}{s} - j x_2'\right)},$$

wobei

$$a = \frac{1}{p_2} \frac{w_1^2}{w_2^2} \frac{K f}{K' f'}$$

gleich dem Uebersetzungsverhältnis der beiden Wickelungssysteme unter Berücksichtigung der Phasenzahlen und der Wickelungsfaktoren. Setzt man

$$r_2 = a r_2'$$

und

$$x_2 = a x_2',$$

so sind r_2 und x_2 die auf die primäre Wickelung reduzierten Werte des Widerstandes und der Reaktanz der Sekundärwickelung. Man hat dann einfach:

$$J_2 = \frac{E_0}{\frac{r_2}{s} - j x_2} = Y_2 E_0,$$

wobei Y_0 die auf die Primärwickelung reduzierte Admittanz des sekundären Systems bei der Schlüpfung s bedeutet.

Man hat nun den gesamten Primärstrom:

$$J_1 = J_0 + J_2 = E_0 (Y_0 + Y_2).$$

Betrachtet man nun das in der umgekehrten Richtung rotierende Feld, dessen Kraftfluss mit Φ' bezeichnet ist, so bleibt hierfür die obige Entwickelung im wesentlichen dieselbe. Nur ist die Schlüpfung der Sekundärwickelung in Bezug auf dies Feld gleich $2 - s$, und folglich ist hier die auf das primäre System reduzierte sekundäre Admittanz:

$$Y_2' = \frac{1}{\frac{r_2}{2 - s} - j x_2}.$$

Ist E_0' die von diesem Felde in der Primärwickelung induzierte E.M.K., so hat man den primären Strom:

$$J_1 = E_0' (Y_0 + Y_2').$$

Die primäre Klemmenspannung E_1 ist

$$E_1 = E_0 + E_0' + J_1 Z_1,$$

wobei Z_1 die Impedanz der Primärwickelung bedeutet.

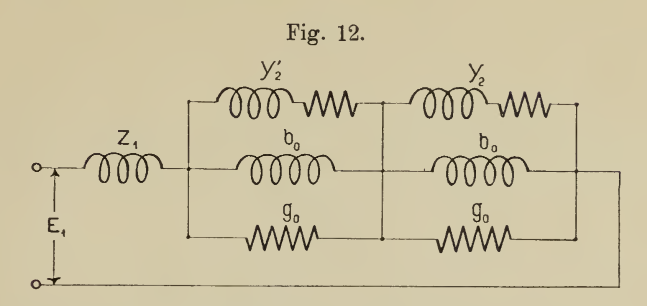
Setzt man nun weiter:

$$Y_0 = g_0 + j b_0,$$

wobei $E_0 b_0$ bezw. $E_0' b_0$ die wattlose Komponente und $E_0 g_0$ bezw. $E_0' g_0$ die Wattkomponente des Magnetisierungsstromes bedeuten, so

sieht man, dass die Einphasenasynchronmaschine durch die in Fig. 12 dargestellte Schaltung ersetzt werden kann.

Fig. 12.



Betrachtet man die Maschine bei kleiner Schlüpfung s, so ist annähernd:

$$Y_2' = \frac{1}{\frac{r_2}{2-s} - j\,x_2} = \frac{1}{\frac{r_2}{2} - j\,x_2} = g_2' + j\,b_2',$$

wobei

$$g_2' = \frac{\frac{r_2}{2}}{\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 + x_2^{\,2}},$$

$$b_2' = \frac{x_2}{\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 + x_2^{\,2}}.$$

Die dem invers rotierenden Felde entsprechende Parallelschaltung hat dann die konstante Admittanz:

$$Y_2' + Y_0 = g_2' + g_0 + j\,(b_2' + b_0).$$

Die entsprechende Impedanz ist:

$$Z' = \frac{g_2' + g_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} - j\,\frac{b_2' + b_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} = r' - j\,x'.$$

In dieser vereinfachten Gestalt ist die Ersatzschaltung in Fig. 13 abgebildet.

Man kann sich somit die Wirkung des invers rotierenden Feldes bei kleiner Schlüpfung s durch eine konstante primäre Impedanz Z' ersetzt denken.

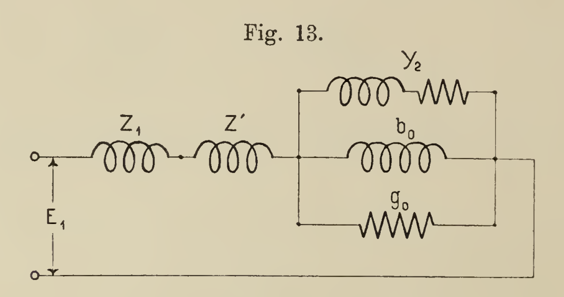
Der Einfluss der höheren Feldharmonischen ist bei der Einphasenmaschine in derselben Weise zu berücksichtigen, wie bei der Mehr-

phasenmaschine. Bei dieser letzteren hatten dieselben sehr angenähert dieselbe Wirkung als eine zusätzliche primäre Reaktanz von der Grösse:

$$\frac{\Sigma K_m f_m}{b_0 K_1 f_1}.$$

Bei der Einphasenmaschine ist hierbei zu bedenken, dass für jedes m zwei Feldharmonische auftreten, und zwar die eine nach rechts

Fig. 13.



und die andere nach links rotierend. Die zusätzliche Reaktanz der höheren Feldharmonischen ist deshalb in der Mehrphasenmaschine:

$$\frac{2 \Sigma K_m f_m}{b_0 K_1 f_1}.$$

In der Ausrechnung der Summe $\Sigma K_m f_m$ sind hier alle ungeraden m mitzunehmen.

6. Einfluss der Kurvenform des zugeführten Stromes.

Ist der zugeführte Strom nicht, wie bis jetzt angenommen, von Sinusform, so kann man für jede Harmonische desselben in der gleichen Weise, wie oben gezeigt, einen Ersatzstromkreis sich denken. Der Einfachheit wegen denken wir uns den streng richtigen Ersatzstromkreis auf die angenäherte Schaltung reduziert und betrachten dieselbe beim Durchschicken einer n-fachen Harmonischen des Stromes.

Der Ausdruck für die Impedanz der Primärwickelung wird

$$Z_{1n} = r_1 - j n x_1.$$

Weil hier r_1 klein ist gegenüber x_1, so wird die primäre Impedanz der Maschine der n^{ten} Harmonischen gegenüber dem absoluten Betrage nach etwa auf das n-fache erhöht. Der Ohmsche Widerstand bleibt dabei konstant.

In dem für die erste Stromharmonische geltenden Ausdruck für die durch die höheren Feldharmonischen erzeugte Reaktanz

$$\Sigma x_m' = \frac{1}{K_1 f_1} \Sigma \frac{K_m f_m}{\frac{p_2}{p_1} \frac{K_m' f_m'}{K_1 f_1} \frac{w_2^2}{w_1^2} \frac{1}{x_2} + b_{01}}$$

muss, wenn derselbe auf die n^{te} Stromharmonische übertragen werden soll, statt

$$x_2 \quad n x_2$$

und statt

$$b_{01} \quad \frac{1}{n} b_{01}$$

eingeführt werden. Diese Reaktanz ist also auch auf das n-fache zu erhöhen.

In den parallelen Zweigen g_0 und b_0 (Fig. 8), welche den Erregerstromkreis repräsentieren, muss mit Rücksicht auf die n^{te} Stromharmonische für g_0 und b_{01} bezw. eingeführt werden

$$\frac{g_0}{0{,}6\, n} \quad \text{und} \quad \frac{b_{01}}{n}.$$

Weil hier g_0 sehr klein ist im Verhältnis zu b_{01}, so ist die aus den beiden Zweigen resultierende Admittanz Y_{01} sehr nahe auf $\frac{1}{n}$ verkleinert. Oder was dasselbe ist, die Impedanz dieser Parallelschaltung ist auch auf das n-fache vergrössert.

Wir betrachten endlich den Stromzweig mit der Admittanz $\frac{1}{a_1} Y_{21}$. Hier ist a_1 eine Konstante, die von n unabhängig ist.

$$\frac{1}{Y_{21}} = \rho_1 - j x_2,$$

$$\rho_1 = \frac{r_2}{s_1}.$$

Für die n^{te} Stromharmonische muss gesetzt werden statt

$$x_2 \quad n x_2$$

und statt

$$\rho_1 \quad \rho_n = \frac{r_2}{s_n},$$

wobei

$$s_n = \frac{\pm n \omega_1 - \omega^0}{n \omega_1},$$

$$\omega^0 = \omega_1 (1 - s_1),$$

$$s_n = \frac{\pm n - 1 + s_1}{n},$$

also

$$\rho_n = \frac{n r_2}{\pm n - 1 + s_1}.$$

Die Impedanz dieses Zweiges ist also

$$\rho_n - j n x_2 = n \left(\frac{r_2}{\pm n - 1 + s_1} - j x_2 \right).$$

Für n ist das positive oder das negative Zeichen einzuführen, je nachdem, ob die n^{te} Stromharmonische denselben oder den entgegengesetzten Rotationssinn von der ersten Stromharmonischen hat.

Hieraus sieht man, dass man die Impedanz aller Zweige der Ersatzschaltung gegenüber der n^{ten} Stromharmonischen erhält, wenn man die Impedanzen der Zweige gegenüber der Grundschwingung bei der Schlüpfung $\pm n - 1 + s_1$ mit n multipliziert. Das Verhältnis zwischen Spannung und Strom ist somit bei der n-fachen Harmonischen n-mal so gross als das Verhältnis zwischen Spannung und Strom für die Grundschwingung des Stromes bei der Schlüpfung $\pm n - 1 + s_1$. Dies Verhältnis ist auch annähernd n-mal dem Verhältnis zwischen Kurzschlussspannung und Kurzschlussstrom der Maschine.

7. Die Form des Sekundärstromes.

Es ist interessant, die Kurvenform des Sekundärstromes der asynchronen Maschinen etwas näher zu betrachten. Zuerst soll der Primärstrom als sinusförmig angenommen werden. Die Schlüpfung der Sekundärwickelung in Bezug auf die m^{te} Harmonische des Feldes ist dann wie gezeigt

$$s_m = \pm 1 - m + m s_1,$$

wo s_1 die Schlüpfung der Sekundärwickelung in Bezug auf die Grundwelle des Feldes bedeutet. Die Winkelgeschwindigkeit der Grundschwingung des Sekundärstromes ist

$$\omega_1{}^0 = s_1 \omega_1,$$

wo ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des Primärstromes bedeutet. Ebenso ist die Winkelgeschwindigkeit der m^{ten} Schwingung des Sekundärstromes

$$\omega_m{}^0 = s_m \omega_1 = \frac{s_m}{s_1} \omega_1{}^0,$$

wo

$$\frac{s_m}{s_1} = \frac{\pm 1 - m}{s_1} + m.$$

Dies Verhältnis ist im allgemeinen keine ganze Zahl. Es besteht somit zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Schwingungen des Sekundärstromes bei einem sinusförmigen Primärstrom kein einfaches Verhältnis. Der Sekundärstrom besteht also im allgemeinen nicht aus harmonischen Schwingungen und kann nicht als ein periodischer Wechselstrom im gewöhnlichen Sinne aufgefasst werden.

Nehmen wir nun zweitens an, dass der Primärstrom kein reiner Sinusstrom sei, sondern eine höhere Harmonische, z. B. eine n^{te} Harmonische besitze. Wir wollen die Schwingungen im Sekundärstrome betrachten, welche hervorgerufen werden einmal von dem Grundton ($n = 1$) des Primärstromes und zweitens von der n^{ten} Harmonischen desselben; dabei sollen diejenigen Schwingungen betrachtet werden, welche mittels der m^{ten} Harmonischen des Feldes von der primären auf die sekundäre Wickelung übertragen werden.

Wie oben ist die Schlüpfung der $1\,m^{ten}$ Feldharmonischen

$$s_m = \pm 1 - m + m s_1$$

und die Winkelgeschwindigkeit der entsprechenden Schwingung des Sekundärstromes

$$\omega_m{}^0 = s_m \omega_1.$$

Dagegen ist, wie früher gezeigt, die Schlüpfung in Bezug auf die $n\,m^{te}$ Feldharmonische

$$s_{nm} = \pm 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} s_1$$

und die Winkelgeschwindigkeit der entsprechenden sekundären Schwingung

$$\omega_{nm}{}^0 = s_{nm} \omega_1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\omega_{nm}{}^0}{\omega_m{}^0} = \frac{s_{nm}}{s_m} = \frac{\pm 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} s_1}{\pm 1 - m + m s_1}.$$

Dies Verhältnis ist im allgemeinen keine ganze Zahl, sondern ein von der Grösse der Schlüpfung s_1 abhängiger Bruch.

Die n^{te} Harmonische des Primärstromes erzeugt somit keine n^{te} Harmonische im Sekundärstrom; sondern die von einer Harmonischen im Primärstrom erzeugte Schwingung des Sekundärstromes hat eine

von der Schlüpfung s_1 abhängige Periodenzahl, welche im allgemeinen in keinem einfachen Verhältnis zu der Periodenzahl der Grundschwingung steht.

Hieraus sieht man, dass es vergebliche Mühe ist, wenn man, wie es oft geschieht, die Stromkurve der sekundären Ströme punktweise mit einer Joubertschen Scheibe, die einmal pro Periode der Grundschwingung Kontakt macht, aufnehmen will; denn die Bedingung für die Anwendbarkeit dieser Methode besteht darin, dass die Stromwelle aus Harmonischen zusammengesetzt ist. Dies ist mit der Stromwelle im sekundären Teil einer Asynchronmaschine, wie gezeigt, nicht der Fall. Macht nämlich die Scheibe pro Periode der Grundschwingung einen Kontakt, so haben die höheren Schwingungen des Stromes in diesen Momenten jedesmal verschiedene Werte. Wir bekommen somit nicht bei jedem Kontakt denselben Momentanwert; sondern derselbe setzt sich aus einem von der ersten Sinusschwingung herrührenden konstanten, und einem von allen höheren Schwingungen herrührenden veränderlichen Wert zusammen. Das Mittel aus den Momentanwerten über eine genügend lange Zeit gibt nur den Momentanwert der ersten Sinusschwingung, weil das Mittel der höheren Schwingungen gleich Null ist.

8. Beispiele von Wickelungsfaktoren.

Der Einfluss der Wickelung auf das Verhalten der asynchronen Maschinen kann, wie gezeigt, durch die folgenden Wickelungsfaktoren ausgedrückt werden:

$K_1 =$ E.M.K.-Faktor in Bezug auf die erste Feldharmonische,
$f_1 =$ A.W.-Faktor in Bezug auf die erste Feldharmonische,
$\Sigma K_m f_m =$ für alle höheren Feldharmonischen.

Im folgenden sollen diese Faktoren für die gewöhnlichsten Arten der Dreiphasen-, Zweiphasen- und Einphasenwickelungen angegeben werden.

a) Dreiphasenwickelungen.

S. 23 und 28 sind die allgemeinen Formeln für die E.M.K.- und A.W.-Faktoren eines p-Phasensystems gegeben. Dieselben sind

$$K_m = \frac{\sin m \dfrac{2\pi}{4p}}{s \sin m \dfrac{2\pi}{4ps}}$$

und

$$f_m = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{\sin m \frac{2\pi}{4p}}{s \sin m \frac{2\pi}{4ps}}.$$

Für eine Dreiphasenwickelung ist $p = 3$ zu setzen, und wir bekommen für eine s-Lochwickelung

$$K_1 = \frac{\sin \frac{2\pi}{12}}{s \sin \frac{2\pi}{12s}},$$

$$f_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{\sin \frac{2\pi}{12}}{s \sin \frac{2\pi}{12s}},$$

$$\Sigma K_m f_m = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{s^2} \Sigma \frac{\sin^2 m \frac{2\pi}{12}}{m^2 \sin^2 m \frac{2\pi}{12s}}.$$

Bei der Summation sind durch drei teilbare m wegzulassen.

In der folgenden Tabelle sind die Faktoren für verschiedene Lochzahlen s ausgerechnet. Man sieht, dass durch die Vergrösserung der Lochzahl s die Summation $\Sigma K_m f_m$ bedeutend verkleinert wird, so dass die durch die höheren Feldharmonischen erzeugte zusätzliche Reaktanz

$$\frac{\Sigma K_m f_m}{b_1 K_1 f_1}$$

dadurch ebenfalls verringert wird. Durch die Vergrösserung der Lochzahl werden aber auch die Faktoren K_1 und f_1 verkleinert, was ein Nachteil ist, weil dadurch sowohl der Leerlaufstrom wie die Nutenreaktanz vermehrt werden.

Faktoren der Dreiphasenwickelungen.

s	K_1	f_1	$\Sigma K_m f_m$
1	1,0	0,81	0,0785
2	0,963	0,784	0,023
3	0,960	0,777	0,0104
4	0,958	0,775	0,0048
5	0,956	0,773	0,0035

b) Zweiphasenwickelungen.

Für p = 2 in den allgemeinen Formeln bekommt man

$$K_1 = \frac{\sin \frac{2\pi}{8}}{s \sin \frac{2\pi}{8s}},$$

$$f_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{\sin \frac{2\pi}{8}}{s \sin \frac{2\pi}{8s}},$$

$$\Sigma K_m f_m = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{s^2} \Sigma \frac{\sin^2 m \frac{2\pi}{8}}{m^2 \sin^2 m \frac{2\pi}{8s}},$$

wo die Summation für alle ungeraden m auszuführen ist. In der Tabelle sind die Werte für einige Lochzahlen s zusammengestellt.

Faktoren der Zweiphasenwickelungen.

s	K_1	f_1	$\Sigma K_m f_m$
1	1,0	0,81	0,19
2	0,924	0,747	0,058
3	0,91	0,737	0,039
4	0,905	0,735	0,022
5	0,903	0,731	0,018

c) Einphasenwickelungen.

In einer Einphasenwickelung seien in der Arbeitsphase s_1 und in der Anlaufsphase s_2 Löcher pro Pol vorhanden. Im ganzen seien also pro Pol $s = s_1 + s_2$ gleich weit voneinander entfernte Löcher vorhanden. Es lassen sich dann genau in gleicher Weise, wie schon gezeigt, die folgenden Formeln ableiten:

$$K_1 = \frac{\sin 2\pi \frac{s_1}{4s}}{s_1 \sin 2\pi \frac{1}{4s}},$$

$$f_1 = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{s_1} \frac{\sin 2\pi \frac{s_1}{4s}}{\sin 2\pi \frac{1}{4s}}$$

und

$$\Sigma K_m f_m = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{s_1^2} \Sigma \frac{\sin^2 m \frac{2\pi s_1}{4s}}{m^2 \sin^2 m \frac{2\pi}{4s}},$$

wo die Summation über alle ungeraden m auszuführen ist.

In der folgenden Tabelle sind die Faktoren für einige Lochzahlen s und s_1 aufgeführt. Für $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$ sind die Faktoren dieselben wie für die Zweiphasenwickelung. Diese Wickelungen sind deswegen hier nicht nochmals aufgeführt.

Faktoren der Einphasenwickelungen.

s	s_1	K_1	f_1	$\Sigma K_m f_m$
6	2	0,963	0,784	0,077
6	4	0,836	0,678	0,0011
15	5	0,956	0,773	0,045
15	10	0,828	0,671	0,0026
15	15	0,638	0,516	0,0054

Weil bei den Zwei- und Einphasenwickelungen keine ungeraden m herausfallen, wird bei denselben bei gleicher Lochzahl s stets die Summe $\Sigma K_m f_m$ grösser als bei den Dreiphasenwickelungen. Die Dreiphasenmaschinen sind deswegen in Bezug auf die Reaktanz der höheren Harmonischen des Feldes günstiger als die Zwei- und Einphasenmaschinen.

III. Das Stromdiagramm der asynchronen Motoren.

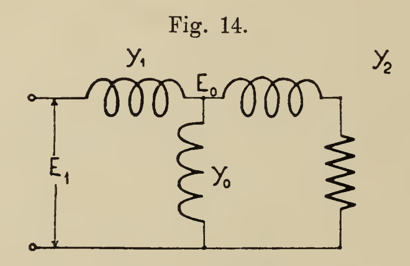
Einleitung.

Im vorhergehenden ist gezeigt worden, wie die Konstanten einer asynchronen Maschine von der Art der Wickelung und von der Phasenzahl abhängig sind, und wie sie auf die eine Wickelung, z. B. auf die primäre, reduziert werden können. Im folgenden wollen wir uns diese Reduktion, eventuell mit Berücksichtigung der Reaktanz der höheren

Feldharmonischen, vorgenommen denken. Eine asynchrone Mehrphasenmaschine lässt sich dann, wie zuerst von Steinmetz gezeigt, durch den in Fig. 14 dargestellten Stromkreis ersetzen. Wie früher gezeigt, ist dieselbe Ersatzschaltung zur Darstellung der Verhältnisse in einer asynchronen Einphasenmaschine, wenn dieselbe nahezu synchron läuft, ebenfalls anwendbar.

In der Ersatzschaltung (Fig. 14) ist bei Einphasen- und Mehrphasenmaschinen die sekundäre Admittanz Y_2 mit der Belastung veränderlich, und zwar beschreibt dieselbe, wie gezeigt, einen Kreis mit dem Durchmesser $\frac{1}{x_2}$, wobei x_2 gleich der sekundären Reaktanz ist. Die primäre Admittanz Y_1, welche mit Berücksichtigung der zusätzlichen Reaktanz der höheren Feldharmonischen erhalten ist, bleibt bei

Fig. 14.



Mehrphasenmaschinen bei allen Belastungen konstant. Bei Einphasenmaschinen dagegen, wo die primäre Admittanz Y_1 mit Berücksichtigung des invers rotierenden Feldes erhalten ist, ist diese Admittanz mit der Belastung etwas veränderlich. Für die im folgenden gegebene Ableitung des Stromdiagrammes der Maschinen, welche für Sinusform des zugeführten Stromes gilt, spielt jedoch diese Aenderung von Y_1 keine bedeutende Rolle, so dass die gegebenen Ausdrücke für das Stromdiagramm sowohl für Ein- als für Mehrphasenmotoren anwendbar sind.

Wir haben in komplexer Schreibweise:

Primäre Admittanz, eventuell mit Berücksichtigung der höheren Feldharmonischen und des invers rotierenden Feldes:

$$Y_1 = g_1 + j\, b_1.$$

Sekundäre Admittanz (auf die Primärwickelung reduziert):

$$Y_2 = g_2 + j\, b_2.$$

Admittanz des Magnetisierungsstromkreises (Erregeradmittanz):

$$Y_0 = g_0 + j\, b_0.$$

Resultierende Admittanz zwischen den primären Klemmen:

$$Y = g + j b.$$

Die Admittanzen Y_0 und Y_2, welche parallel geschaltet sind, addieren sich einfach, so dass wir schreiben können

$$Y' = Y_0 + Y_2 = g_0 + g_2 + j(b_0 + b_2) = g' + j b'.$$

Die resultierende Admittanz Y ist in komplexer Schreibweise:

$$Y = \frac{Y_1 (Y_0 + Y_2)}{Y_1 + Y_0 + Y_2} = \frac{Y_1 Y'}{Y_1 + Y'},$$

$$g + j b = \frac{(g_1 + j b_1)(g' + j b')}{g_1 + j b_1 + g' + j b'}.$$

In dieser Gleichung muss das Reelle gleich dem Reellen und das Imaginäre gleich dem Imaginären sein, also

$$b(b_1 + b') - g(g_1 + g') = g_1 g' - b_1 b',$$
$$b(g_1 + g') + g(b_1 + b') = b_1 g' + g_1 b'.$$

Bestimmt man hieraus als Unbekannte b und g, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{b' y_1^2 + b_1 y'^2}{y_1^2 + y'^2 + 2 b_1 b' + 2 g_1 g'} = \frac{b' y_1^2 + b_1 y'^2}{(b_1 + b')^2 + (g_1 + g')^2} \\ g &= \frac{g' y_1^2 + g_1 y'^2}{y_1^2 + y'^2 + 2 b_1 b' + 2 g_1 g'} = \frac{g' y_1^2 + g_1 y'^2}{(b_1 + b')^2 + (g_1 + g')^2} \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

Durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen erhält man:

$$y^2 = \frac{y_1^2 y'^2}{y_1^2 + y'^2 + 2 b_1 b' + 2 g_1 g'} = \frac{y_1^2 y'^2}{(b_1 + b')^2 + (g_1 + g')^2} \quad 1a.$$

Hier bedeuten y, y_1 und y' die absoluten Werte der Admittanzen:

$$y = \sqrt{b^2 + g^2},$$
$$y_1 = \sqrt{b_1^2 + g_1^2},$$
$$y' = \sqrt{b'^2 + g'^2}.$$

Die Gleichungen 1 und 1a gestatten für jeden Fall, wenn die Komponenten b' und g' der parallel geschalteten Admittanzen y_0 und y_2 gegeben sind, die Komponenten b und g der resultierenden Admittanz zu berechnen.

Wünscht man umgekehrt die Gleichungen mit Rücksicht auf b' und g' als Unbekannte zu lösen, so kann man schreiben:

$$-b'(b - b_1) + g'(g - g_1) = b b_1 - g g_1,$$
$$b'(g - g_1) + g'(b - b_1) = -b g_1 - g b_1.$$

Hieraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} b' &= \frac{b\,y_1^2 - b_1\,y^2}{y^2 + y_1^2 - 2\,b\,b_1 - 2\,g\,g_1} = \frac{b\,y_1^2 - b_1\,y^2}{(b - b_1)^2 + (g - g_1)^2} \\ g' &= \frac{g\,y_1^2 - g_1\,y^2}{y^2 + y_1^2 - 2\,b\,b_1 - 2\,g\,g_1} = \frac{g\,y_1^2 - g_1\,y^2}{(b - b_1)^2 + (g - g_1)^2} \end{aligned}\right\} \quad 2.$$

Durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen erhält man:

$$y'^2 = \frac{y^2\,y_1^2}{y^2 + y_1^2 - 2\,b\,b_1 - 2\,g\,g_1} = \frac{y^2\,y_1^2}{(b - b_1)^2 + (g - g_1)^2} \quad 2a.$$

Hieraus kann umgekehrt, wenn die resultierende Admittanz y gegeben ist, die Admittanz y' berechnet werden.

Eine derartige gegenseitige Zuordnung zweier Gebiete nennt man geometrisch eine Abbildung, und zwar ist die Abbildung der Y'-Ebene auf der Y-Ebene durch die Funktion

$$Y = \frac{Y_1\,Y'}{Y_1 + Y'}$$

der komplexen Veränderlichen Y' vermittelt. Umgekehrt ist die Abbildung der Y-Ebene auf der Y'-Ebene durch die Funktion

$$Y' = \frac{Y\,Y_1}{Y - Y_1}$$

der komplexen Veränderlichen Y vermittelt.

Es lässt sich zeigen, dass eine derartige Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich ist, weshalb sie auch konform genannt wird.

Nehmen wir in der Y'-Ebene die Susceptanzen b' als Abscissen und die Konduktanzen g' als Ordinaten, und ziehen wir eine Vertikale (b' = konstant), so erhalten wir dementsprechend in der Y-Ebene als Abbildung den folgenden Kreis:

$$b^2 + b_1^2 - 2\,b_1\,b + g^2 + g_1^2 - 2\,g_1\,g = \frac{b}{b'}\,y_1^2 - \frac{b_1}{b'}\,y^2$$

oder

$$y^2 - 2\,\frac{b_1\,b' + \frac{1}{2}\,y_1^2}{b_1 + b'}\,b - 2\,\frac{g_1\,b'}{b_1 + b'}\,g = -\,\frac{b'\,y_1^2}{b_1 + b'} \quad . \quad 3.$$

Ziehen wir in der Y'-Ebene eine Horizontale (g' = konstant), so erhalten wir ebenso

$$y^2 - 2\,\frac{b_1\,g'}{g_1 + g'}\,b - 2\,\frac{g_1\,g' + \frac{1}{2}\,y_1^2}{g_1 + g'}\,g = -\,\frac{g'\,y_1^2}{g_1 + g'} \quad . \quad 4.$$

Wir haben somit als Abbildung der Koordinaten der Y'-Ebene auf der Y-Ebene zwei Scharen von Kreisen. Weil die Abbildung konform ist, sind die Kreisscharen zu einander orthogonal.

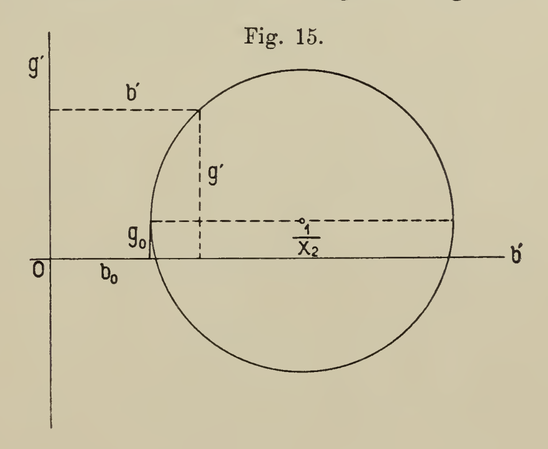
Das Gesetz, nach welchem Y' variiert, ist im vorhergehenden abgeleitet. Wir haben dabei die Eisenverluste berücksichtigt, indem wir gesetzt haben:

$$g_0 = \frac{W_0}{E_0^{\,2}},$$

wobei W_0 = Effektverlust im Eisen,
E_0 = Spannung an den Enden des Magnetisierungsstromkreises,
g_0 = Konduktanz des Magnetisierungsstromkreises.

Wir haben dann für Y' den in Fig. 15 dargestellten Kreis.

Fig. 15.



Die Kreisgleichung lautet:

$$\left[b' - \left(b_0 + \frac{1}{2x_2}\right)\right]^2 + (g' - g_0)^2 = \frac{1}{4x_2^{\,2}}$$

oder

$$y'^2 - 2b'\left(b_0 + \frac{1}{2x_2}\right) - 2g'g_0 = \frac{1}{4x_2^{\,2}} - g_0^{\,2} - \left(b_0 + \frac{1}{2x_2}\right)^2$$

$$= -y_0^{\,2} - \frac{b_0}{x_2}.$$

Hier führen wir die Werte von y', b' und g' aus den Gleichungen 2 und 2a ein und bekommen

$$y^2 y_1^{\,2} - 2\left(b_0 + \frac{1}{2x_2}\right)(b\,y_1^{\,2} - b_1\,y^2) - 2g_0\,(g\,y_1^{\,2} - g_1\,y^2)$$

$$= -\left(y_0^{\,2} + \frac{b_0}{x_2}\right)(y^2 + y_1^{\,2} - 2b\,b_1 - 2g\,g_1).$$

Ordnet man diese Gleichung, erhält man eine solche von der Form

$$b^2 + g^2 - 2\beta b - 2\gamma g = - C^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5.$$

Hierin ist

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{N}\left[b_1\left(y_0{}^2 + \frac{b_0}{x_2}\right) + y_1{}^2\left(b_0 + \frac{1}{2x_2}\right)\right] \\ \gamma &= \frac{1}{N}\left[g_1\left(y_0{}^2 + \frac{b_0}{x_2}\right) + y_1{}^2 g_0\right] \\ C^2 &= \frac{1}{N}\left[y_1{}^2\left(y_0{}^2 + \frac{b_0}{x_2}\right)\right] \\ N &= y_1{}^2 + y_0{}^2 + 2b_1 b_0 + 2g_1 g_0 + \frac{1}{x_2}(b_1 + b_0) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 6.$$

Die Gleichung 5 stellt den Kreis der resultierenden Admittanz y dar. Die Zentrumskoordinaten sind β und γ. Der Radius dieses Kreises sei mit R bezeichnet; dann ist

$$\begin{aligned} R^2 &= - C^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ &= \frac{1}{N^2}\left[- C^2 N^2 + \beta^2 N^2 + \gamma^2 N^2\right]. \end{aligned}$$

Führt man die Werte aus den Gleichungen 6 ein, so ergibt sich nach einer kleinen Reduktion:

$$R^2 = \frac{y_1{}^4}{4x_2{}^2 N^2},$$

$$R = \frac{y_1{}^2}{2x_2 N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7.$$

Wenn wir den Radius $\frac{1}{2x_2}$ des ersten Admittanzkreises mit R′ bezeichnen, haben wir einfach

$$R = \frac{y_1{}^2}{N} R' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7a.$$

Durch die folgende Substitution lässt sich der Nennerausdruck N auf eine Form bringen, die einfacher und für die Konstruktion des Diagrammes sehr bequem ist.

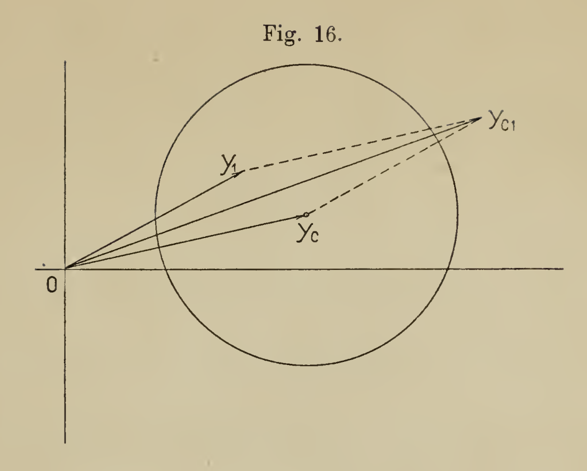
In der Fig. 16, welche den ersten Admittanzkreis vom Radius $R' = \frac{1}{2x_2}$ darstellt, sei die Admittanz des Kreismittelpunktes mit y_c bezeichnet, dann ist:

$$y_c{}^2 = b_c{}^2 + g_c{}^2,$$

wobei

$$b_c = b_0 + R'; \quad g_c = g_0.$$

Fig. 16.



Die geometrische Summe von y_c und der primären Admittanz y_1 wollen wir mit y_{c1} bezeichnen. Wir haben dann in dem Nennerausdruck

$$N = y_1{}^2 + y_0{}^2 + 2\, b_1 b_0 + 2\, g_0 g_1 + \frac{1}{x_2}(b_1 + b_0)$$

$$= (b_1 + b_0)^2 + (g_1 + g_0)^2 + \frac{1}{x_2}(b_1 + b_0),$$

$$b_0 = b_c - R'$$

und

$$g_0 = g_c$$

zu setzen. Es ergibt sich dann

$$N = (b_1 + b_c - R')^2 + (g_1 + g_c)^2 + 2\,R'\,(b_1 + b_c - R')$$

$$= (b_1 + b_c)^2 + (g_1 + g_c)^2 - R'^2,$$

$$N = y_{c1}{}^2 - R'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8.$$

Dies in Gleichung 7a eingesetzt, gibt für den Kreisradius R:

$$R = \frac{y_1{}^2}{y_{c1}{}^2 - R'^2}\, R' \quad \ldots\ldots \quad 7\,b.$$

IV. Experimentelle Bestimmung der Konstanten eines fertigen Mehrphasenmotors.

Man bestimmt die Ohmschen Widerstände pro Phase der primären und der sekundären Wickelung beispielsweise durch Strom- und Spannungsmessung mit Gleichstrom. Der so gefundene Ohmsche Widerstand sei für die Primärwickelung gleich r_1 und für die Sekundärwickelung gleich r_2'. Der sekundäre Widerstand auf die primäre Wickelung reduziert ist dann

$$r_2 = a\, r_2'.$$

a) Leerlaufsversuch.

Das Uebersetzungsverhältnis a von der sekundären Wickelung auf die primäre ist wie erläutert:

$$a = \frac{K_1 f_1 w_1{}^2 p_1}{K_1' f_1' w_2{}^2 p_2}.$$

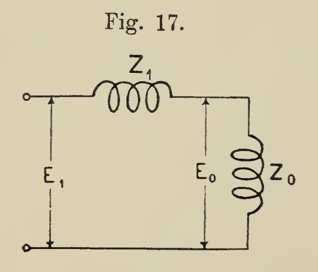
Hierbei bedeutet:

$\frac{p_1}{p_2} \frac{w_1}{w_2} \frac{f_1}{f_1'}$ das Uebersetzungsverhältnis der Ströme,

$\frac{w_1}{w_2} \frac{K_1}{K_1'}$ das Uebersetzungsverhältnis der E.M.Ke.

Wir führen dem Stator die Spannung E_1 und den Strom J_1 pro Phase zu und messen die induzierte E.M.K. in der offenen, stillstehenden Sekundärwickelung, dieselbe sei für eine Phase mit E_0' bezeichnet. Die Ersatzschaltung reduziert sich in diesem Falle auf den in Fig. 17 abgebildeten einfachen Stromkreis. Man hat also

Fig. 17.



$$E_1 = J_1 (Z_1 + Z_0),$$
$$E_0 = J_1 Z_0,$$

wobei Z_1 gleich der primären Impedanz der Maschine ist, eventuell mit Berücksichtigung der zusätzlichen Reaktanz der höheren Feldharmonischen.

$$Z_0 = \frac{1}{g_0 + j\, b_0}$$

ist die Erregerimpedanz der Maschine. Die E.M.K. E_0 ist gleich der sekundär gemessenen E.M.K., auf die Primärwickelung reduziert, somit

$$E_0 = \frac{w_1}{w_2} \frac{K_1}{K_1'} E_0'.$$

Hieraus hat man

$$\frac{E_0'}{E_1} = \frac{Z_0}{Z_1 + Z_0} \frac{w_2}{w_1} \frac{K_1'}{K_1} = c_1 \frac{w_2}{w_1} \frac{K_1'}{K_1},$$

wobei

$$c_1 = \frac{Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

einen Faktor bedeutet, der nur wenig kleiner ist als 1, und durch den der Spannungsverlust in der primären Impedanz bei Leerlauf berücksichtigt wird.

Zweitens führen wir dem stillstehenden Rotor eine Spannung E_2 und einen Strom J_2 pro Phase zu, indem wir gleichzeitig die induzierte E.M.K. E_0 in einer primären Phase messen. Unter Berücksichtigung des Uebersetzungsverhältnisses hat man dann ähnlich wie oben:

$$\frac{E_0}{E_2} = \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0} \frac{w_1}{w_2} \frac{K_1}{K_1'} = c_2 \frac{w_1}{w_2} \frac{K_1}{K_1'}.$$

Die Impedanz Z_2 der sekundären Wickelung ist hierbei auf die primäre Wickelung reduziert gedacht. Z_1 und Z_2 sind für gewöhnlich nahezu gleich, und diese beiden Impedanzen sind gegenüber der Impedanz Z_0 sehr klein. Wir können deshalb ohne merklichen Fehler

$$c_1 = c_2 = c$$

setzen, und erhalten dann:

$$c^2 = \frac{E_0' E_0}{E_1 E_2},$$

$$\frac{w_1^2}{w_2^2} \frac{K_1^2}{K_1'^2} = \frac{E_1 E_0}{E_0' E_2}.$$

Wie aus den abgeleiteten Formeln für die Wickelungsfaktoren K und f folgt (S. 29), ist

$$\frac{K_1}{K_1'} = \frac{f_1}{f_1'}.$$

Wir haben deshalb auch

$$\frac{w_1^2}{w_2^2} \frac{K_1 f_1}{K_1' f_1'} = \frac{E_1}{E_0'} \frac{E_0}{E_2}$$

und hieraus folgt das Uebersetzungsverhältnis

$$a = \frac{p_1}{p_2} \frac{w_1^2}{w_2^2} \frac{K_1 f_1}{K_1' f_1'} = \frac{p_1}{p_2} \frac{E_1}{E_0'} \frac{E_0}{E_2}.$$

Aus der ersten Leerlaufsmessung erhält man nun die Impedanz Z_0 dem absoluten Betrage nach, indem man setzt

$$\frac{w_1}{w_2} \frac{K_1}{K_1'} E_0' = \sqrt{\frac{E_1 E_0}{E_0' E_2}} E_0' = J_1 z_0,$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{E_1 E_0}{E_0' E_2}} \frac{E_0'}{J_1}.$$

Messen wir bei der ersten Leerlaufsmessung nebenbei auch mit einem Wattmeter den in die eine Phase des Stators hineingeleiteten Effekt bei offener Sekundärwickelung und synchron rotierendem Rotor, so können wir die beiden Komponenten r_0 und x_0 von der Impedanz Z_0

bestimmen. Bezeichne W_1 den pro Phase hineingeleiteten Effekt bei Synchronismus, so ist

$$r_0 + r_1 = \frac{W_1}{J_1^2},$$

wo r_0 bestimmt werden kann, weil r_1 aus den Gleichstrommessungen bekannt ist. Aus der Impedanz

$$Z_0 = r_0 - j\,x_0$$

bestimmt sich leicht die Admittanz

$$Y_0 = g_0 + j\,b_0,$$

wo

$$g_0 = \frac{r_0}{z_0^2}, \qquad b_0 = \frac{x_0}{z_0^2}.$$

b) Kurzschlussversuch.

Wir schliessen den Rotor kurz und führen dem Stator Strom zu; gemessen wird der Strom J_1^0 und die Spannung E_1^0 pro Phase. Man hat dann die totale Impedanz

$$Z_1^0 = \frac{E_1^0}{J_1^0} = Z_1 + \frac{Z_0}{Z_2 + Z_0}\,Z_2 = Z_1 + c\,Z_2,$$

indem wir wie früher

$$\frac{Z_0}{Z_2 + Z_0} = c$$

setzen.

Zweitens schliessen wir den Stator kurz, führen dem Rotor Strom zu und messen J_2^0 und E_2^0 pro Phase. Bezeichnen wir die totale Impedanz zwischen den Enden einer Phase in diesem Falle mit $\frac{1}{a}\,Z_2^0$, so ist

$$a\,\frac{E_2^0}{J_2^0} = Z_2^0 = Z_2 + \frac{Z_0}{Z_1 + Z_0}\,Z_1 = Z_2 + c\,Z_1.$$

Ist Z_1^0 nahezu gleich Z_2^0, so ist auch Z_1 nahezu gleich Z_2 und wir können schreiben

$$Z_1 = Z_2 = \frac{Z_1^0}{1 + c} = \frac{Z_2^0}{1 + c}.$$

Hieraus sind die Impedanzen Z_1 und Z_2 mit genügender Annäherung bestimmt, und man erhält die Reaktanzen x_1 und x_2 aus den Beziehungen

$$x_1 = \sqrt{z_1^2 - r_1^2}, \qquad x_2 = \sqrt{z_2^2 - r_2^2},$$

wo r_1 und r_2 aus den Gleichstrommessungen bestimmt sind.

Endlich hat man nun

$$Y_1 = g_1 + j\,b_1,$$

wobei

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^{\,2}} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{x_1}{z_1^{\,2}}$$

und analog für

$$Y_2 = g_2 + j\,b_2.$$

c) Zahlenbeispiele.

Im folgenden soll die Anwendung der gegebenen Theorie auf einen praktischen Fall gezeigt werden. Zuerst wurden die Konstanten eines Drehstrommotors zu 5 PS. nach dem eben erläuterten Verfahren ermittelt und hieraus das kreisförmige Stromdiagramm des Motors berechnet; dann wurden durch Umrechnungen die Konstanten für denselben Motor beim Betrieb als Einphasenmotor ermittelt, und zwar einmal bei Serieschaltung von zwei und das andere Mal bei Serieschaltung von drei der primären Phasen. Aus den so erhaltenen Konstanten sind die kreisförmigen Stromdiagramme des Einphasenmotors für diese beiden Betriebsverhältnisse berechnet. Zur Kontrolle wurden auch die drei Stromdiagramme des Motors experimentell bestimmt. Als Belastung diente dabei ein Gleichstromgenerator, welcher auch als Motor laufen konnte, wodurch der Asynchronmotor in einen Asynchrongenerator überging. Hierdurch ging der früher als Stromquelle dienende Synchrongenerator in einen Synchronmotor über. Bei diesen verschiedenen Belastungszuständen wurde die Klemmenspannung der Asynchronmaschine und die Umdrehungszahl der Synchronmaschine (also die Periodenzahl des Stromes) konstant gehalten.

Ermittelung der Konstanten des Dreiphasenmotors.

Mittels Strom- und Spannungsmessung ergab sich für den Ohmschen Widerstand einer Phase:

$$\text{Primär} \quad r_1 = 0{,}27 \text{ Ohm,}$$
$$\text{Sekundär} \quad r_2' = 0{,}114 \quad \text{„}$$

Weil, wie sich aus dem Folgenden ergibt, das Uebersetzungsverhältnis $a = 2{,}44$ ist, hat man den auf die Primärwickelung reduzierten Ohmschen Widerstand

$$r_2 = a\,r_2' = 0{,}28 \text{ Ohm.}$$

Es wurde ein Drehstrom von der Stärke J_1 und von der Spannung E_1 in jede Phase der Statorwickelung geleitet. Die Spannung

einer Phase der offenen, stillstehenden Rotorwickelung E_0' und der zugeführte Effekt W_1 pro Phase bei synchron laufendem Rotor wurden gemessen. Hierbei ergab sich:

$$J_1 = 4{,}9 \text{ Amp.},$$
$$E_1 = 111 \text{ Volt},$$
$$W_1 = 56 \text{ Watt},$$
$$E_0' = 68{,}5 \text{ Volt}.$$

Ein zweiter Leerlaufsversuch, wobei der Strom J_2 von der Spannung E_2 in jede Phase der Rotorwickelung hineingeleitet wurde, und wobei die Spannung einer Phase der offenen Statorwickelung E_0 betrug, ergab die folgenden Werte:

$$J_2 = 8{,}5 \text{ Amp.},$$
$$E_2 = 76{,}5 \text{ Volt},$$
$$E_0 = 115 \quad \text{„}$$

Aus diesen Messungen hat man, weil $p_1 = p_2 = 3$ ist:

$$a = \frac{E_1\, E_0}{E_0'\, E_2} = \frac{111 \,.\, 115}{68{,}5 \,.\, 76{,}4} = 2{,}44,$$

$$c^2 = \frac{E_0'\, E_0}{E_1\, E_2} = 0{,}935,$$

$$c = 0{,}966,$$

$$z_0 = \sqrt{a}\, \frac{E_0'}{J_1} = 1{,}56\, \frac{68{,}5}{4{,}9} = 21{,}8 \text{ Ohm},$$

$$r_1 + r_0 = \frac{W_1}{J_1^{\,2}} = \frac{56}{4{,}90^2} = 2{,}33 \text{ Ohm},$$

$$r_0 = 2{,}33 - 0{,}27 = 2{,}06 \text{ Ohm},$$

$$x_0 = \sqrt{z_0^{\,2} - r_0^{\,2}} = 21{,}7 \text{ Ohm},$$

$$g_0 = \frac{r_0}{z_0^{\,2}} = 0{,}0043 \text{ Mho},$$

$$b_0 = \frac{x_0}{z_0^{\,2}} = 0{,}0458 \text{ Mho},$$

$$y_0 = \frac{1}{z_0} = 0{,}046 \text{ Mho}.$$

Ferner wurde bei kurz geschlossenem Rotor dem Stator ein Strom $J_1^{\,0}$ und eine Spannung $E_1^{\,0}$ pro Phase zugeführt. Hierbei ergab sich:

$$J_1^{\,0} = 15{,}3 \text{ Amp.},$$
$$E_1^{\,0} = 25{,}5 \text{ Volt}.$$

Hieraus hat man

$$z_1^0 = \frac{E_1^0}{J_1^0} = 1{,}67 = z_1 + c\, z_2.$$

Der Kontrolle wegen wurde dieser letztere Versuch noch von der Rotorseite des Motors ausgeführt, indem der Stator kurz geschlossen war und der Strom in den Rotor hineingeleitet wurde. Bei dieser Messung betrug

$$J_2^0 = 22{,}9 \text{ Amp.},$$
$$E_2^0 = 15{,}6 \text{ Volt},$$

woraus sich ergibt

$$z_2^0 = a\,\frac{E_2^0}{J_2^0} = 1{,}67 = z_2 + c\, z_1.$$

Man hat also hier einen Fall, wo

$$z_1 + c\, z_2 = z_2 + c\, z_1$$

oder

$$z_1 = z_2 = \frac{z_1^0}{1 + c} = 0{,}85 \text{ Ohm}.$$

Es findet sich nun weiter

$$x_1 = x_2 = \sqrt{z_1^2 - r_1^2} = 0{,}81 \text{ Ohm}$$

und hieraus die Leitfähigkeiten

$$g_1 = 0{,}371 \text{ Mho},$$
$$g_2 = 0{,}382 \text{ Mho},$$
$$b_1 = b_2 = 1{,}11 \text{ Mho},$$
$$y_1 = y_2 = 1{,}17 \text{ Mho}.$$

Die Primärwickelung des Motors hat 5 Nuten pro Pol und Phase. Nach der Tabelle S. 51 ist also für dieselbe

$$K_1 f_1 = 0{,}74,$$
$$\Sigma K_m f_m = 0{,}0035,$$

somit ist die von den höheren Feldharmonischen herrührende primäre Reaktanz:

$$x_1'' = \frac{\Sigma K_m f_m}{b_0 K_1 f_1} = \frac{0{,}0035}{0{,}0458 \,.\, 0{,}74} = 0{,}1 \text{ Ohm}$$

und

$$x_1 = x_1' + x_1'' = 0{,}71 + 0{,}1 = 0{,}81 \text{ Ohm}.$$

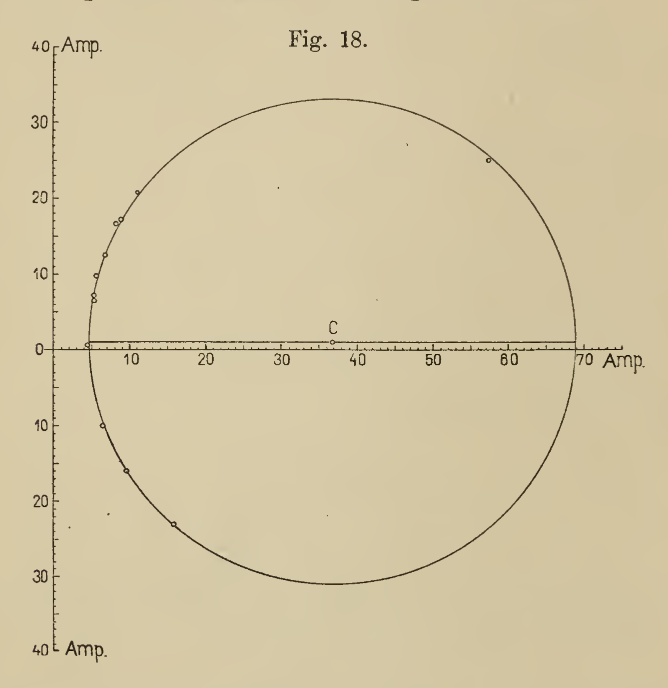
Aus diesen Konstanten ist das Admittanzdiagramm des Motors nach den Gleichungen 6 und 7 (S. 58) berechnet. Die Kreiskonstanten sind die folgenden:

Mittelpunktskoordinaten $\beta = 0{,}335$ Mho, $\gamma = 0{,}0096$ Mho,
Kreisradius $R = 0{,}291$ Mho.

Durch Multiplikation dieser Grössen mit der konstanten Klemmenspannung von 110 Volt pro Phase erhält man das Stromdiagramm der Maschine. In Fig. 18 ist dasselbe gezeichnet. Die experimentell gefundenen Punkte sind eingetragen; man sieht, dass dieselben mit genügender Genauigkeit mit dem berechneten Kreis übereinstimmen.

Es soll nun das Stromdiagramm desselben Motors als Einphasenasynchronmaschine untersucht werden und zwar zunächst für den Fall, dass alle drei primären Phasen in Serie geschaltet sind.

Fig. 18.



Für eine Einphasenwickelung mit $s = s_1 = 15$ ist nach der Tabelle S. 53

$$K_1 f_1 = 0{,}329,$$
$$\Sigma K_m f_m = 0{,}0054.$$

Wir bestimmen zuerst das neue Uebersetzungsverhältnis

$$a = \frac{K_1 f_1 p_1 w_1^2}{K_1' f_1' p_2 w_2^2},$$

was für den Dreiphasenmotor zu 2,44 gefunden wurde. Beim Betrieb als Einphasenmaschine haben wir w_1 zu verdreifachen, die Phasenzahl geht von 3 auf 1 herunter, und das Produkt der Wickelungsfaktoren änderte sich im Verhältnis $\frac{0{,}329}{0{,}74}$.

Folglich ist das neue Uebersetzungsverhältnis

$$a = 2{,}44 \, \frac{9}{3} \, \frac{0{,}329}{0{,}74} = 3{,}26.$$

Die reduzierten Konstanten sind nun:

Der primäre Widerstand

$$r_1' = 3 \, . \, 0{,}27 = 0{,}81 \text{ Ohm}.$$

Die primäre Reaktanz

$$x_1' = 3 \, . \, 0{,}71 = 2{,}13 \text{ Ohm}.$$

Die Erregersusceptanz

$$b_0 = \frac{2{,}44}{3{,}26} \, 0{,}0457 = 0{,}0342 \text{ Mho}.$$

Die Erregerkonduktanz

$$g_0 = \frac{2{,}44}{3{,}26} \, 0{,}0043 = 0{,}00324 \text{ Mho}.$$

Folglich ist die von den höheren Feldharmonischen herrührende primäre zusätzliche Reaktanz

$$x_1'' = \frac{2 \Sigma K_m f_m}{b_0 K_1 f_1} = \frac{2 \, . \, 0{,}0054}{0{,}0342 \, . \, 0{,}329} = 0{,}97 \text{ Ohm}.$$

Die sekundäre Reaktanz ist

$$x_2 = \frac{3{,}26}{2{,}44} \, 0{,}81 = 1{,}07 \text{ Ohm},$$

und die entsprechende Susceptanz

$$b_2 = \frac{2{,}44}{3{,}26} \, . \, 1{,}10 = 0{,}825 \text{ Mho}.$$

Ebenso ist der sekundäre Widerstand

$$r_2 = \frac{3{,}26}{2{,}44} \, 0{,}28 = 0{,}374 \text{ Ohm}$$

und die entsprechende Konduktanz

$$y_2 = \frac{2{,}44}{3{,}26} \, 0{,}382 = 0{,}286 \text{ Mho}.$$

Die dem invers rotierenden Felde entsprechenden Konstanten sind nun annäherungsweise (siehe S. 45)

$$g_2' = \frac{\frac{r_2}{2}}{\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 + x_2^2} = 0{,}158 \text{ Mho},$$

$$b_2' = \frac{x_2}{\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 + x_2^2} = 0{,}91 \text{ Mho.}$$

Der von diesem Felde herrührende primäre Widerstand ist

$$r' = \frac{g_2' + g_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} = \frac{0{,}161}{0{,}911} = 0{,}177 \text{ Ohm}$$

und die entsprechende Reaktanz

$$x' = \frac{b_2' + b_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} = \frac{0{,}94}{0{,}911} = 1{,}03 \text{ Ohm.}$$

Der gesamte, für die Primärwickelung einzuführende Widerstand ist nun

$$r_1 = r_1' + r' = 0{,}81 + 0{,}177 = 0{,}99 \text{ Ohm,}$$

und die gesamte Primärreaktanz ist

$$x_1 = x_1' + x_1'' + x' = 2{,}13 + 0{,}97 + 1{,}03 = 4{,}13 \text{ Ohm.}$$

Die inversen Konstanten der Primärwickelung sind nun

$$y_1 = 0{,}2355 \text{ Mho,}$$
$$g_1 = 0{,}0548 \text{ „}$$
$$b_1 = 0{,}229 \text{ „}$$

Für die Konstanten des Admittanzkreises findet man nun durch Einsetzung der berechneten Werte in die Gleichungen 6 und 7 (S. 58):

$$\beta = 0{,}111 \text{ Mho,}$$
$$\gamma = 0{,}0064 \text{ „}$$
$$R = 0{,}0815 \text{ „}$$

Durch Multiplikation dieser Grössen mit der konstanten Klemmenspannung erhält man das Stromdiagramm des Einphasenmotors.

Dieser Kreis ist in Fig. 19 für 145 Volt gezeichnet. Die eingezeichneten Punkte, welche bei einer konstanten Klemmenspannung von 145 Volt experimentell aufgenommen wurden, zeigen eine gute Uebereinstimmung mit dem berechneten Kreise.

Als letztes Beispiel soll nun das Admittanzdiagramm desselben Drehstrommotors beim Betrieb als Einphasenmotor mit zwei primären Phasen in Serie entwickelt werden.

Für eine Einphasenwickelung mit $s = 15$ und $s_1 = 10$ ist nach der Tabelle S. 53

$$K_1 f_1 = 0{,}556,$$
$$\Sigma K_m f_m = 0{,}0026.$$

Bei der Bestimmung des neuen Uebersetzungsverhältnisses

$$a = \frac{K_1 f_1 p_1 w_1^2}{K_1' f_1' p_2 w_2^2},$$

was bei dem Dreiphasenmotor zu 2,44 gefunden wurde, haben wir w_1 zu verdoppeln; die Phasenzahl p_1 geht von 3 auf 1 herunter, und das Produkt der Wickelungsfaktoren ändert sich im Verhältnis

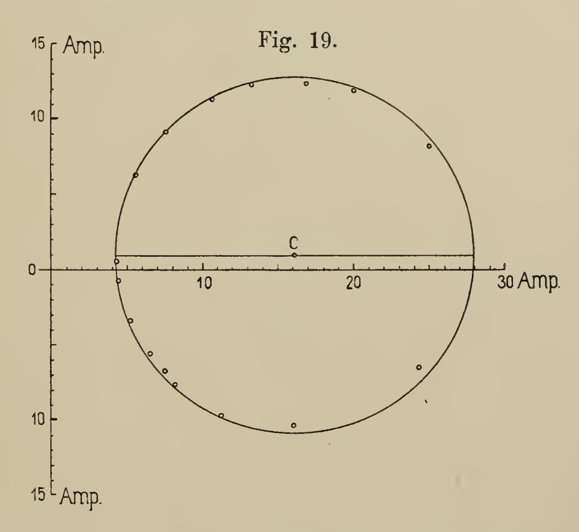
$$\frac{0{,}556}{0{,}74}.$$

Das neue Uebersetzungsverhältnis wird somit

$$a = 2{,}44 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{0{,}556}{0{,}74} = 2{,}44.$$

Das Uebersetzungsverhältnis bleibt also in diesem Falle dasselbe wie bei dem Dreiphasenmotor.

Fig. 19.



Die reduzierten Konstanten sind nun die folgenden:

Der primäre Widerstand

$$r_1' = 2 \cdot 0{,}27 = 0{,}54 \text{ Ohm.}$$

Die primäre Reaktanz

$$x_1' = 2 \cdot 0{,}71 = 1{,}42 \text{ Ohm.}$$

Die Erregersusceptanz

$$b_0 = 0{,}0457 \text{ Mho.}$$

Die Erregerkonduktanz

$$g_0 = 0{,}00433 \text{ Mho.}$$

Die von den höheren Feldharmonischen herrührende zusätzliche primäre Reaktanz ist

$$x_1'' = \frac{2 \Sigma K_m f_m}{b_0 K_1 f_1} = \frac{2 \cdot 0{,}0026}{0{,}0457 \cdot 0{,}556} = 0{,}204 \text{ Ohm.}$$

Weil das Uebersetzungsverhältnis ungeändert bleibt, sind die sekundären Konstanten dieselben wie für den Dreiphasenmotor.

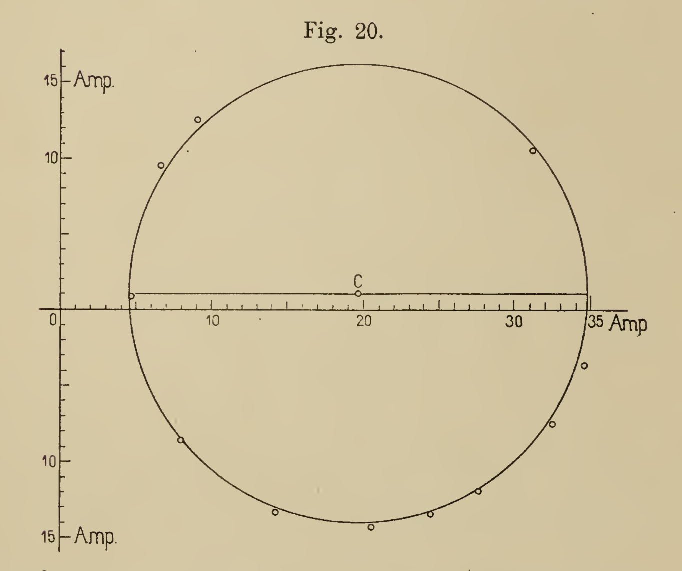
$$r_2 = 0{,}28 \text{ Ohm},$$
$$g_2 = 0{,}382 \text{ Mho},$$
$$x_2 = 0{,}81 \text{ Ohm},$$
$$b_2 = 1{,}10 \text{ Mho}.$$

Die dem invers rotierenden Felde entsprechenden Konstanten sind

$$g_2' = \frac{0{,}14}{0{,}14^2 + 0{,}81^2} = 0{,}207 \text{ Mho}.$$

$$b_2' = \frac{0{,}81}{0{,}14^2 + 0{,}81^2} = 1{,}19 \text{ Mho}.$$

Fig. 20.



Der von diesem Felde herrührende primäre Widerstand ist

$$r' = \frac{g_2' + g_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} = 0{,}134 \text{ Ohm},$$

und die entsprechende primäre Reaktanz

$$x' = \frac{b_2' + b_0}{(g_2' + g_0)^2 + (b_2' + b_0)^2} = 0{,}786 \text{ Ohm}.$$

Der gesamte, für die primäre Wickelung einzusetzende Widerstand ist somit

$$r_1 = r_1' + r' = 0{,}54 + 0{,}134 = 0{,}67 \text{ Ohm},$$

und die gesamte primäre Reaktanz ist

$$x_1 = x_1' + x_1'' + x' = 1{,}42 + 0{,}204 + 0{,}786 = 2{,}41 \text{ Ohm}.$$

Hieraus ergeben sich die inversen Primärkonstanten

$$y_1 = 0{,}403 \text{ Mho},$$
$$g_1 = 0{,}1075 \text{ „}$$
$$b_1 = 0{,}386 \text{ „}$$

Für die Konstanten des Admittanzkreises findet man durch Einsetzung der berechneten Werte in die Gleichungen 6 und 7 (S. 58):

Kreisradius $R = 0{,}137$ Mho,
Mittelpunktskoordinaten $\beta = 0{,}178$ Mho, $\gamma = 0{,}0097$ Mho.

Das entsprechende Stromdiagramm für eine Spannung von 110 Volt ist in Fig. 20 gezeichnet. Die eingezeichneten Punkte sind experimentell bei einer Spannung von 110 Volt aufgenommen. Die Uebereinstimmung ist, wie man sieht, eine genügende.


3 0112 072877399